Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2022
26.04.2022
Blatt 4

ÜBUNGEN ZU HARMONISCHE ANALYSIS

11. (1+1 P.) Es sei $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$\widehat{f}(k) = -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x + \frac{\pi k}{|k|^2}) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} (f(x) - f(x + \frac{\pi k}{|k|^2})) e^{-ikx} dx.$$

(b) Ist f global Hölderstetig zum Exponenten $\alpha \in (0,1]$, so ist $|\widehat{f}(k)| \leq \frac{c_f}{|k|^\alpha}$.

Hinweis: Für (a) beachte man $-1 = e^{i\pi}$.

12. (1+4 P.) Hier soll gezeigt werden, dass die Aussage in Teil (b) der Aufgabe 11 nicht verbessert werden kann. Dazu seien $n = 1$ und für $\alpha \in (0,1)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\alpha k} e^{i 2^k x}.$$

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von f und zeigen Sie: f ist global Hölderstetig zum Exponenten α.

Hinweis: Zum Beweis der Hölderstetigkeit teile man die entsprechende Reihe in die Bereiche $2^k \leq |h|^{-1}$ und $2^k > |h|^{-1}$ auf.

13. (3+3 P.) Es sei $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ monoton und beschränkt. Zeigen Sie, dass

$$|\widehat{f}(k)| \lesssim_f \frac{1}{|k|}.$$

Tip: Nehmen Sie zuerst an, dass f eine Treppenfunktion ist. Behandeln Sie den allgemeinen Fall durch Approximation.

Bitte wenden!

14. (2+3+2(+3)+2 P.) Es seien $1 \leq p < q < \infty$ und $0 < \alpha < \beta$. Zeigen Sie die folgenden strikten Inklusionen:

(a) $L^p(\mathbb{T}^n) \supsetneqq L^q(\mathbb{T}^n)$, (b) $\ell^p(\mathbb{Z}^n) \subsetneqq \ell^q(\mathbb{Z}^n)$,

(c) $V^p([a,b]) \subsetneqq V^q([a,b])$, (d) $C^{0,\beta}(\mathbb{T}^n) \subsetneqq C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^n)$.

Hinweis: Verwenden Sie für (a) die Höldersche Ungleichung, in (b) betrachte man zunächst den Fall $\|(a_k)_k\|_p = 1$. Die Striktheit in Teil (c) nachzuweisen, ist etwas knifflig, versuchen Sie es mit $f(x) = x^{\frac{1}{p}} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ auf $[a,b] = [0, \frac{1}{\pi}]$ (wobei $f(0) = 0$ zu ergänzen ist) und der Zerlegungsfolge $Z^{(N)} = \{x_k^{(N)} : 0 \leq k \leq N\}$, dabei sei $x_k^{(N)} = (\pi(N+1-k))^{-1}$ für $k \in \{1, ..., N\}$. – Da die genannten Funktionenräume alle dadurch definiert sind, dass ihre Norm endlich ausfällt, sollten Ihre Argumente zugleich ergeben, dass die Einbettungsabbildung

$$J : L^q(\mathbb{T}^n) \to L^p(\mathbb{T}^n), \quad f \mapsto Jf := f$$

stetig ist, entsprechend für die Aufgabenteile (b) - (d). Beachten Sie dabei, dass eine lineare Abbildung $T : (E, \| \quad \|_E) \to (F, \| \quad \|_F)$ genau dann stetig ist, wenn sie beschränkt ist, d. h. wenn eine Abschätzung $\|Tx\|_F \lesssim \|x\|_E$ für alle $x \in E$ besteht. (Vgl. Ana II, Abschnitte 1.1 und 1.3)

Abgabe: 03.05.2022
Besprechung: 10.05.2022