Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2022
12.04.2022
Blatt 2

ÜBUNGEN ZU HARMONISCHE ANALYSIS

4. (4+3 P.) Der Fejér-Kern $(F_N)_{N\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{T})$ ist definiert durch

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x),$$

wobei $D_n(x) = \sum_{|k|\leq n} e^{ikx}$ der Dirichlet-Kern ist.

(a) Verifizieren Sie die folgenden Darstellungen des Fejér-Kerns:

(i) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $F_N(x) = \sum_{|k|\leq N} (1 - \frac{|k|}{N})e^{ikx}$;

(ii) für $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ gilt $F_N(x) = N$;

(iii) für $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ ist $F_N(x) = \frac{1}{N} \quad \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}$.

(b) Zeigen Sie, dass $(F_N)_{N\in\mathbb{N}}$ eine approximative Einheit auf $\mathbb{T}$ ist.

Hinweis zu Teil (a), (iii): Es ist $\cos(s) - \cos(t) = 2\sin(\frac{t+s}{2})\sin(\frac{t-s}{2})$. (Wieso?)

5. (4 P.) Es sei $(k_i)_{i\in I}$ eine approximative Einheit auf dem eindimensionalen Torus $\mathbb{T}$ und, für $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{T}^n$,

$$K_i(x) := \prod_{j=1}^{n} k_i(x_j).$$

Zeigen Sie, dass $(K_i)_{i\in I}$ eine approximative Einheit auf $\mathbb{T}^n$ ist.

Bitte wenden!

6. (6 P.) Verifizieren Sie die folgenden Rechenregeln zur Bestimmung von Fourierkoeffizienten und -reihen. Hierbei sei $f \in L^1(\mathbb{T})$.

(a) Ist $g(x) = f(-x)$, so gilt $\widehat{g}(k) = \widehat{f}(-k)$,

(b) ist f gerade, so folgt

$$\widehat{f}(k) = \widehat{f}(-k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos{(kx)} dx,$$

und die Fourierreihe von f ist gegeben durch

$$S_N f(x) = \widehat{f}(0) + 2 \sum_{k=1}^{N} \widehat{f}(k) \cos{(kx)}.$$

(c) Ist f ungerade, so gilt

$$\widehat{f}(k) = -\widehat{f}(-k) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\pi} f(x) \sin{(kx)} dx,$$

insbesondere $\widehat{f}(0) = 0$, und für die Fourierreihe von f hat man

$$S_N f(x) = 2i \sum_{k=1}^{N} \widehat{f}(k) \sin{(kx)}.$$

(d) $\widehat{\overline{f}}(k) = \overline{\widehat{f}}(-k)$,

(e) für alle $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\int_{-\pi-a}^{\pi-a} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

(f) ist $g(x) = f(x-a)$, so gilt $\widehat{g}(k) = e^{-ika} \widehat{f}(k)$.

7. (6 P.) Berechnen Sie die Fourierreihe von $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) := |\sin(x)|$. Konvergiert die Reihe gleichmäßig gegen f ? Können Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$$

berechnen?

Abgabe: 19.04.2022
Besprechung: 26.04.2022