Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2022
21.06.2022
Blatt 11

ÜBUNGEN ZU
HARMONISCHE ANALYSIS

35. (4 P.) Ein Maß μ auf einem messbaren Raum $(X, \mathcal{A})$ heißt *stetig*, wenn $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in X$ gilt. Für eine LCA-Gruppe G sei

$$M_c(G) := \{\mu \in M(G) : \mu \text{ ist stetig } \}.$$

Zeigen Sie, dass $M_c(G)$ ein abgeschlossenes Ideal in der kommutativen Banach-Algebra $(M(G), +, *)$ ist.

36. (4+4+4 P.) Ist die Faltung zweier Flächenmaße $\mu, \nu \in M(\mathbb{R}^n)$ wieder ein Flächenmaß? Oder zumindest auf einer Fläche konzentriert? Diese Frage beantwortet Teil (b) der nachstehenden Aufgabe:

(a) Für $i \in \{1, 2\}$ seien G_i LCA-Gruppen und $\mu_i, \nu_i \in M(G_i)$. Zeigen Sie, dass

$$(\mu_1 \times \mu_2) * (\nu_1 \times \nu_2) = (\mu_1 * \nu_1) \times (\mu_2 * \nu_2)$$

gilt. Warum reicht es, diese Identität für Rechteckmengen zu überprüfen?

(b) Für $r, s > 0$ seien $H_r := [-r, r] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ und $V_s := \{0\} \times [-s, s] \subset \mathbb{R}^2$. Die zugehörigen Längenmaße seien hier mit σ_r und τ_s bezeichnet. Berechnen Sie die Faltungen $\sigma_r * \sigma_r$ und $\sigma_r * \tau_s$.

(c) Es sei $\partial Q := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x_1|, |x_2|) = 1\}$ und $\sigma_{\partial Q}$ das zugehörige Längenmaß. Welche Beiträge erhalten Sie zu $\sigma_{\partial Q} * \sigma_{\partial Q}$, wenn Sie Teil (b) (und ggf. geeignete Dirac-Maße) verwenden? (Hinweis: Im Prinzip sollten es 16 Beiträge sein, von denen sich einige gut zusammenfassen lassen.)

Bitte wenden!

37. (4 P.) Eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt rotationssymmetrisch, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und für alle orthogonalen $n \times n$-Matrizen O gilt $F(x) = F(Ox)$. In diesem Fall setzen wir $f(r) := F(r, 0, \ldots, 0)$, so dass $F(x) = f(|x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Zeigen Sie für eine solche Funktion $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} F(\xi) = c_n (2\pi)^{\frac{n}{2}} |\xi|^{1-\frac{n}{2}} \int_0^\infty f(r) J_{\frac{n}{2}-1}(r|\xi|) r^{\frac{n}{2}} dr.$$

Hierbei ist c_n die Normierungskonstante des Haarmaßes auf $\mathbb{R}^n$ und $J_{\frac{n}{2}-1}$ eine Besselfunktion, vgl. Übungen zu "Einführung partielle Dgln.", Blatt 2, Aufgabe 6. Als Anwendung berechne man die Fouriertransformierte der charakteristischen Funktion der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$.

Hinweis: Ist $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist F für Lebesgue-fast alle $r > 0$ über die Sphäre S_r^{n-1} integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x) dx = \int_0^\infty \int_{S_r^{n-1}} F(x) d\sigma_r(x) dr.$$

Siehe z.B.: Forster, O., Analysis III, §14, Satz 8. Hierbei handelt es sich um einen häufig gebrauchten Spezialfall der Co-Area - Formel

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x) dx = \int_{-\infty}^\infty \int_{P(x)=r} F(x) \frac{d\sigma_r(x)}{|\nabla P(x)|} dr,$$

vgl. Evans, L., Gariepy, R.: Measure Theory and Fine Properties of Functions, Kap. 3.

Abgabe: 28.06.2022
Besprechung: 05.07.2022