Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2022
14.06.2022
Blatt 10

ÜBUNGEN ZU HARMONISCHE ANALYSIS

32. (5 P.) $(G_1, +_1)$ und $(G_2, +_2)$ seien LCA-Gruppen. Zeigen Sie, dass

$$\widehat{G_1 \times G_2} = \widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$$

in folgendem Sinne gilt: Genau dann ist $\gamma \in \widehat{G_1 \times G_2}$, wenn es $\gamma_1 \in \widehat{G_1}$ und $\gamma_2 \in \widehat{G_2}$ gibt, so dass $\gamma(x_1, x_2) = \gamma_1(x_1)\gamma_2(x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$. Was ergibt sich zusammen mit Ihrem Ergebnis aus Aufgabe 31 für die duale Gruppe von $(\mathbb{C}^*, \cdot)$?

33. (6 P.) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\widehat{G}$ kompakt ist, wenn G diskret ist. Im folgenden soll gezeigt werden: Ist G kompakt, so ist $\widehat{G}$ diskret. Es sei also G eine kompakte abelsche Gruppe mit Haar-Maß H, so dass

$$\int_G dH(x) = 1.$$

Das neutrale Element von $\widehat{G}$ sei mit γ_e bezeichnet, also $\gamma_e(x) = 1$ für alle $x \in G$.

(a) Zeigen Sie: Ist $\gamma \in \widehat{G}$, so gilt

$$\int_G \gamma(x) dH(x) = \delta_{\gamma\gamma_e}.$$

(b) Folgern Sie für $\alpha, \beta \in \widehat{G}$ die Orthogonalitätsrelation

$$\int_G \alpha(x)\overline{\beta}(x) dH(x) = \delta_{\alpha\beta}.$$

(c) Da G kompakt ist, gilt $\gamma_e \in L^1(G)$. Folgern Sie aus der Stetigkeit von $\widehat{\gamma_e}$, dass $\{\gamma_e\} \subset \widehat{G}$ offen und somit $\widehat{G}$ diskret ist.

34. (2+1+4 P.) Es sei G eine LCA-Gruppe mit Haar-Maß H und dualer Gruppe $\widehat{G}$. $(k_i)_{i\in I}$ sei eine approximative Einheit auf G. Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert

$$\lim_{i\in I} \widehat{k_i}(\gamma).$$

Ist die Konvergenz gleichmäßig? Oder zumindest kompakt, also gleichmäßig auf kompakten Teilmengen $C \subset \widehat{G}$?

Abgabe: 21.06.2022
Besprechung: 28.06.2022