Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2022
05.04.2022
Blatt 1

ÜBUNGEN ZU HARMONISCHE ANALYSIS

1. (1+1+1+2 P.) Beweisen Sie für den Dirichlet-Kern

$$D_N(x) = \sum_{|k|\le N} e^{ikx} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

die folgenden Abschätzungen:

(a) $|D_N(x)| \lesssim \min(2N+1, \frac{1}{|x|}), \qquad (|x| \le \pi)$

(b) $||D_N||_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim \ln(2N+1)$,

(c) $\ln(N) \lesssim ||D_N||_{L^1(\mathbb{T})}$,

(d) für $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt $(2N+1)^{\frac{1}{p'}} \lesssim_p ||D_N||_{L^p(\mathbb{T})} \lesssim_p (2N+1)^{\frac{1}{p'}}$.

2. (4+2+(2+3) P.) Es sei $0 < \varepsilon < \pi$.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k \frac{e^{ikx}}{k}$$

gleichmäßig in $(r,x) \in [0,1] \times [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ konvergiert. Vollziehen Sie dazu den Beweis des verallgemeinerten Leibniz-Kriteriums nach (vgl. Ana I, Abschnitt 3.1).

(b) Bestimmen Sie die Grenzfunktion und zeigen Sie

(c) für $x \in (0, 2\pi)$ die Identitäten

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k} = -\ln(2\sin\frac{x}{2})$,

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}$.

Bitte wenden!

3. (4 P.) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{-n-\delta}$$

konvergiert. (Um den Satz von Fubini anwenden zu können, ist es sinnvoll, die Reihe als Integral nach dem Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)$ aufzufassen.)

Abgabe: 12.04.2022
Besprechung: 19.04.2022