Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SS 2017
21.06.2017
Blatt 9

ÜBUNGEN ZU HARMONISCHE ANALYSIS

Aufgabe 16 (6 P.) Untersuchen Sie, ob die nachstehenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ positiv definit sind:

(a) $f(x) = \sin^2(x)$, (b) $f(x) = \cos^2(x)$,

(c) $f(x) = \cos(x^2)$, (d) $f(x) = \dfrac{\sin(7x)}{\sin(x)}$.

Die Funktion in Teil (d) ist für $x \in \pi\mathbb{Z}$ stetig durch $f(x) = 7$ zu ergänzen. Bestimmen Sie für die positiv definiten Funktionen jeweils ein positives Maß $\mu \in M(\mathbb{R})$, so dass

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} d\mu(\xi)$$

.

Aufgabe 17 (4 P.) Beweisen Sie die folgende allgemeine Form der Parsevalschen Gleichung: Ist G eine LCA-Gruppe und sind $f, g \in L^2(G)$, so gilt:

$$\langle f, g\rangle := \int_G f(x)\overline{g(x)}dH(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\gamma)\overline{\widehat{g}(\gamma)}d\widehat{H}(\gamma) =: (\widehat{f}, \widehat{g}).$$

Wenden Sie dazu den Satz von Plancherel auf $f + g$ an und ersetzen Sie anschließend g durch ig. (Dieses Verfahren nennt man Polarisation.)

Aufgabe 18 (5 P.) Es sei $\chi := \chi_{[-1,1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[-1, 1]$.

(a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{\chi} = \mathcal{F}_{\mathbb{R}}\chi$, die Faltung $\chi * \chi$ sowie deren Fouriertransformierte. (Geben Sie an, welche Normierung der Haar-Maße H und $\widehat{H}$ Sie verwenden.)

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Fourierinversionsformel oder der Parsevalschen Gleichung (vgl. A. 17) die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^k(\xi)}{\xi^k} d\xi, \qquad k \in \{2, 3, 4\},$$

wobei der Integrand in $\xi_0 = 0$ durch den Wert 1 stetig ergänzt sei.

Bitte wenden!

Aufgabe 19 (4 P.) Mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung und einem der Ergebnisse aus Aufgabe 7 zeige man für $\alpha, \beta > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \Gamma(\alpha - i\xi)\Gamma(\beta + i\xi) d\xi = \frac{2\pi}{2^{\alpha+\beta}} \Gamma(\alpha + \beta).$$

Modifizieren Sie die Rechnung, um für $\lambda > 0$ die folgende Verallgemeinerung zu erhalten:

$$\int_{\mathbb{R}} \Gamma(\alpha - i\xi)\Gamma(\beta + i\xi)\lambda^{i\xi} d\xi = \frac{2\pi\lambda^{\alpha}}{(1+\lambda)^{\alpha+\beta}} \Gamma(\alpha + \beta).$$

Abgabe: 27.06.2017, in der Vorlesung,
Besprechung: 30.06.2017