Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SS 2017
07.06.2017
Blatt 7

ÜBUNGEN ZU HARMONISCHE ANALYSIS

Aufgabe 12 (4 P.) μ und ν seien (positive) endliche Maße auf einer Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$. μ sei ein Radon-Maß und es gelte $\nu << \mu$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Radon-Nikodym, dass ν ebenfalls ein Radon-Maß ist.

Problem 7 (Besselfunktionen, 2+4+2+4 P.) Für $p \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$f_p(x) := \int_0^\pi \sin^{2p} t e^{-ix\cos t} dt.$$

(a) Begründen Sie, dass f_p beliebig oft ("unter dem Integral") differenzierbar ist. Folgern Sie:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k f_p(x) = (-i)^k \int_0^\pi \cos^k t \sin^{2p} t e^{-ix\cos t} dt.$$

(b) Leiten Sie die Beziehungen $f_p'' = f_{p+1} - f_p$ und $(2p+1)f_p'(x) = -xf_{p+1}(x)$ sowie die Differenzialgleichung $f_p''(x) + \frac{2p+1}{x} f_p'(x) + f_p(x) = 0$ $(x \neq 0)$ her.

Die Besselfunktion $J_p : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ der Ordnung $p \geq 0$ wird definiert durch

$$J_p(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(p + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^p f_p(x).$$

(c) Beweisen Sie, dass die Besselsche Differenzialgleichung

$$J_p''(x) + \frac{1}{x} J_p'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) J_p(x) = 0$$

erfüllt ist, und leiten Sie

(d) die Rekursionsformeln

$$\frac{d}{dx}(x^{-p} J_p(x)) = -x^{-p} J_{p+1}(x) \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dx}(x^p J_p(x)) = x^p J_{p-1}(x)$$

her.

Bitte wenden!

Aufgabe 13 (2+2 P.) Drücken Sie die Fouriertransformierten $\mathcal{F}_{\mathbb{R}} f$ beziehungsweise $\mathcal{F}_{\mathbb{R}} g$ der Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & : \quad |x| < 1 \\ 0 & : \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

und

$$g(x) := \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & : \quad |x| < 1 \\ 0 & : \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

mit Hilfe von Besselfunktionen aus.

Abgabe: 13.06.2017, in der Vorlesung,
Besprechung: 16.06.2017