Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SS 2017
24.05.2017
Blatt 5

ÜBUNGEN ZU HARMONISCHE ANALYSIS

Problem 6 (4+3+2+3+2 P.) Der Fejér-Kern $(F_N)_{N\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{T})$ ist definiert durch

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x),$$

wobei $D_n(x) = \sum_{|k|\le n} e^{ikx}$ der Dirichlet-Kern ist.

(a) Verifizieren Sie die folgenden Darstellungen des Fejér-Kerns:

  (i) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $F_N(x) = \sum_{|k|\le N} (1 - \frac{|k|}{N})e^{ikx}$;

  (ii) für $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ gilt $F_N(x) = N$;

  (iii) für $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ ist $F_N(x) = \frac{1}{N} \quad \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}$.

(b) Zeigen Sie, dass $(F_N)_{N\in\mathbb{N}}$ eine approximative Einheit auf $\mathbb{T}$ ist.

(c) Folgern Sie (ohne Benutzung des Satzes von Stone-Weierstraß): Jede stetige, 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kann gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximiert werden. (Approximationssatz für Weierstraß für periodische Funktionen)

(d) Verallgemeinern Sie die Aussage in (c) auf höhere Dimensionen. Formulieren Sie eine Behauptung, und begründen Sie diese.

(e) Es sei $p \in [1, \infty)$ und $f \in L^p(\mathbb{T})$. Was können Sie über die punktweise Konvergenz der Funktionenfolge $(F_N * f)_{N\in\mathbb{N}}$ mit Teil (b) folgern?

Hinweis zu Teil (a), (iii): Es ist $\cos(s) - \cos(t) = 2\sin(\frac{t+s}{2})\sin(\frac{t-s}{2})$. (Wieso?)

Bitte wenden!

Aufgabe 7 (8 P.) Bestimmen Sie die duale Gruppe $\widehat{G}$ für die multiplikative Gruppe $G = (\mathbb{R}^+, \cdot)$. Welche Gestalt nimmt die Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^+} : L^1(G) \to L^\infty(\widehat{G})$ an? Für die Funktionenscharen $f_\gamma(x) = x^\gamma e^{-x}$ mit $0 < \gamma$ und $g_\beta(x) = \dfrac{x^\beta}{1+x}$ mit $0 < \beta < 1$ sind Ihnen die Fouriertransformierten $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^+} f_\gamma(\xi)$ und $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^+} g_\beta(\xi)$ aus früheren "Problems" bereits bekannt. Geben Sie diese an.

Abgabe: 30.05.2017, in der Vorlesung,
Besprechung: 02.06.2017