Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SS 2017
17.05.2017
Blatt 4

ÜBUNGEN ZU HARMONISCHE ANALYSIS

Aufgabe 4 (2 + 4 P.) Beweisen Sie die Teile (c) und (d) von Satz 3 in Abschnitt 1.2 der Vorlesung.

Problem 5 (4 + 2 + 3 + 1 P.) Für $z, w \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ seien die Γ- und B-Funktionen definiert durch die uneigentlichen parameterabhängigen Integrale

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx = \int_{\mathbb{R}} f_z(x) dx$$

mit $f_z(x) := \chi_{(0,\infty)}(x) x^{z-1} e^{-x}$ (was für $x \leq 0$ als $f_z(x) = 0$ zu interpretieren ist) und

$$\mathrm{B}(z, w) := \int_0^1 (1-t)^{z-1} t^{w-1} dt.$$

Im Folgenden soll der Zusammenhang

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \Gamma(z+w)\mathrm{B}(z, w) \tag{1}$$

zwischen Γ- und B-Funktion hergestellt und für $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < \operatorname{Re} z < 1$ die Identität

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{2}$$

gezeigt werden.

(a) Berechnen Sie die Faltung $f_z * f_w$ (bezüglich der LCA-Gruppe $(\mathbb{R}, +)$).

(b) Integrieren Sie Ihr Ergebnis aus (a), um (1) zu erhalten.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{B}(z, w) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{s^{z-1}}{(1+s)^{z+w}} ds$.

(d) Folgern Sie schließlich (2) aus (1), (c) und der Lösung eines früheren Problems.

Hinweis zu (c): Substituieren Sie $s = \dfrac{t}{1-t}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 5 (5 P.) Es sei

$$k \in L^1\Big((\mathbb{R}^+, \cdot), \frac{dx}{x}\Big) \qquad \text{mit} \qquad \int_0^\infty k(x)\frac{dx}{x} = 1.$$

Konstruieren Sie hieraus eine approximative Einheit $(k_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ auf $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ mit $k_1(x) = k(x)$ und

$$L^1 - \lim_{\varepsilon \to 0} k_\varepsilon * f = f \qquad \text{für alle} \qquad f \in L^1\Big((\mathbb{R}^+, \cdot), \frac{dx}{x}\Big).$$

Aufgabe 6 (6 P.) Beweisen Sie für den Dirichlet-Kern $D_N(x) = \sum\limits_{|k| \leq N} e^{ikx}$ die Darstellung

$$D_N(x) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} \qquad (x \notin 2\pi\mathbb{Z}),$$

die Identität

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)dx = 1$$

und die folgenden Abschätzungen:

(a) $|D_N(x)| \lesssim \min(2N+1, \frac{1}{|x|}), \qquad (|x| \leq \pi)$

(b) $||D_N||_{L^1(\mathbb{T})} \lesssim \ln(2N+1)$,

(c) $\ln(N) \lesssim ||D_N||_{L^1(\mathbb{T})}$.

Abgabe: 23.05.2017, in der Vorlesung,
Besprechung: 26.05.2017