Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SS 2017
10.05.2017
Blatt 3

ÜBUNGEN ZU HARMONISCHE ANALYSIS

Aufgabe 2 (4 P.) Bestimmen Sie das Haar-Maß der multiplikativen Gruppe $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$. Wenn Sie Polarkoordinaten benutzen, werden Sie in natürlicher Weise auf eine Darstellung $G \simeq G_1 \times G_2$ mit bekannten Gruppen G_1 und G_2 geführt. Geben Sie das Haar-Integral auch in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 3 (4 P.) Für $i \in \{1, 2\}$ seien $(G_i, +_i)$ LCA-Gruppen und

$$\varphi : G_1 \to G_2$$

ein Isomorphismus topologischer Gruppen, d. h. φ sei stetig mit stetiger Inverser und es gelte $\varphi(x +_1 y) = \varphi(x) +_2 \varphi(y)$ für alle $x, y \in G_1$. Das Haar-Maß auf G_1 sei H. Zeigen Sie, dass das von φ auf $\mathcal{B}(G_2)$ induzierte Maß H_φ das Haar-Maß auf G_2 ist.

Problem 4 (Hörmander; 8 + 3 + 1 P.) Es seien $1 \le p, q < \infty$, G eine nicht kompakte LCA-Gruppe und

$$T : L^p(G) \to L^q(G)$$

eine stetige lineare Abbildung, die mit allen Translationen τ_h, $h \in G$, vertauscht. Zeigen Sie:

(a) Für alle $f \in L^p(G)$ ist $\lim_{h\to\infty} \|f + \tau_h f\|_p = 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_p$.

(b) Die Stetigkeitsabschätzung: $\|Tf\|_q \le c\|f\|_p$ für alle $f \in L^p(G)$ impliziert $\|Tf\|_q \le c 2^{(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f\|_p$ für alle $f \in L^p(G)$.

Folgern Sie: Ist $q < p$, so ist $T = 0$.

Hinweis: In (a) ist ein Approximationsargument erforderlich. Führen Sie dieses genau aus.

Abgabe: 16.05.2017, in der Vorlesung,
Besprechung: 19.05.2017