Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SS 2017
03.05.2017
Blatt 2

ÜBUNGEN ZU
HARMONISCHE ANALYSIS

Problem 2 (7 + 3 + 3 P.) Für $0 < \gamma < 1$ sei $I_\gamma := \int_0^\infty \frac{x^{\gamma-1}}{1+x} dx$.

(a) Berechnen Sie I_γ mit Hilfe der Partialbruchzerlegung des Cosecans. (Anleitung: Zerlegen Sie den Integrationsbereich in die Teilintervalle $(0, 1)$ und $(1, \infty)$. Verwenden Sie anschließend die geometrische Reihe. Begründen Sie die Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwertbildung, z. B. mit Hilfe des Satzes von Beppo Levi.)

(b) Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis auf $\gamma \in S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

(c) Was ergibt sich für $I_{\alpha,\beta} := \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\beta} dx$, wenn Sie $0 < \operatorname{Re} \alpha < \beta$ voraussetzen?

Problem 3 (Ein-Punkt-Kompaktifizierung nach Alexandrov, 7 + 1 + 2 P.) Es sei (X, τ) ein Hausdorff-Raum, ferner existiere ein Objekt $\infty \notin X$. Man setzt $X_\infty := X \cup \{\infty\}$ und definiert eine Teilmenge $\Omega \subset X_\infty$ als offen, falls $\Omega \in \tau$ ist, oder falls $\infty \in \Omega$ und $X_\infty \setminus \Omega$ kompakt ist. Das System dieser Mengen sei mit τ_∞ bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) (X_∞, τ_∞) ist ein kompakter topologischer Raum.

(b) Ist (X, τ) kompakt, so ist $\{\infty\}$ offen.

(c) Ist (X, τ) lokal kompakt, so ist (X_∞, τ_∞) Hausdorffsch.

Abgabe: 09.05.2017, in der Vorlesung,
Besprechung: 12.05.2017