Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SS 2017
19.07.2017
Blatt 12

ÜBUNGEN ZU HARMONISCHE ANALYSIS

Aufgabe 28 (1+1+3+1+1 P.) Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f, g : X \to \mathbb{C}$ $\mathcal{A}$-meßbar mit Verteilungsfunktionen d_f bzw. d_g und $1 < p, q, r < \infty$, so dass $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.

(a) Zeigen Sie: $d_{fg}(xy) \leq d_f(x) + d_g(y)$,

(b) ist $f \in L^{q,\infty}(X)$ mit $||f||_{q,\infty} = 1$ und $g \in L^{r,\infty}(X)$ mit $||g||_{r,\infty} = 1$, so gilt für alle $x, y > 0$ mit $xy = t$

$$d_{fg}(t) \leq x^{-q} + y^{-r},$$

(c)

$$d_{fg}(t) \leq \frac{q^{\frac{p}{q}} r^{\frac{p}{r}}}{pt^p}$$

(d) sowie

$$||fg||_{p,\infty}^p \leq \frac{1}{p} \cdot q^{\frac{p}{q}} r^{\frac{p}{r}}.$$

(e) Folgern Sie die Höldersche Ungleichung für schwache L^p-Räume:

$$p^{\frac{1}{p}} ||fg||_{p,\infty} \leq q^{\frac{1}{q}} ||f||_{q,\infty} \, r^{\frac{1}{r}} ||g||_{r,\infty}.$$

Aufgabe 29 (5 P.) Es seien $p, q, r \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Zeigen Sie, dass eine "schwache Hölder-Ungleichung" der Form

$$||fg||_p \leq ||f||_{q,\infty} ||g||_r$$

im allgemeinen nicht gilt. (Tip: Betrachten Sie den Maßraum $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}, \lambda)$ und die Funktionen $f(x) = x^{-\frac{1}{q}}$ sowie $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{\frac{1}{r}} x^{\frac{\varepsilon - 1}{r}} \chi_{(0,1)}(x)$.) Widerspricht dies (angesichts der Aufgabe 28) dem klassischen Satz von Marcinkiewicz?

Bitte wenden!

Aufgabe 30 (Zwei Ungleichungen von Hardy und Littlewood, 1+3+1+2 P.)
Es seien $Y = \mathbb{Z}, \mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ und, für $A \subset \mathbb{Z}$, $\nu(A) = \sum_{k \in A} \langle k \rangle^{-2}$. Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $k \in \mathbb{Z}$ setzen wir $Tf(k) := \langle k \rangle \widehat{f}(k)$. Zeigen Sie:

(a) $T : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(Y, \mathcal{C}, \nu)$ ist stetig.

(b) $T : L^1(\mathbb{T}) \to L^{1,\infty}(Y, \mathcal{C}, \nu)$ ist stetig.

(c) Zu $p \in (1, 2]$ existiert ein $C_p > 0$, so dass $\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle k \rangle^{p-2} |\widehat{f}(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p ||f||_p$.

(d) Für $2 \leq p' < \infty$ gilt

$$||f||_{p'} \leq C_p \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle k \rangle^{p'-2} |\widehat{f}(k)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} .$$

Hinweis: (d) folgt aus (c) mit einem Dualitätsargument.

Abgabe: 25.07.2017, in der Vorlesung,
Besprechung: 28.07.2017