Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SS 2017
12.07.2017
Blatt 11

ÜBUNGEN ZU HARMONISCHE ANALYSIS

Aufgabe 24 (3+2+2 P.)

(a) Für $1 \le p < \infty$ zeige man, dass $\| \quad \|_{p,\infty}$ eine Quasi-Norm ist.

Für $x \in [0,1]$ seien $f(x) = x$ und $g(x) = 1 - x$.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktionen $d_f(s), d_g(s)$ und $d_{f+g}(s)$ bezüglich des Lebesgue-Maßes auf $[0,1]$.

(c) Zeigen Sie: Ist $1 \le p \le 3$, so gilt die Dreiecksungleichung für $\|f+g\|_{p,\infty}$ *nicht*.

Aufgabe 25 (4 P.) Für einen endlichen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $1 \le p < q$ soll gezeigt werden, dass $L^{q,\infty}(X) \subset L^p(X)$. Beweisen Sie dazu die Ungleichung

$$||f||_p \le \left(\frac{q}{q-p}\right)^{\frac{1}{p}} \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \, ||f||_{q,\infty}.$$

Anleitung: Starten Sie mit $||f||_p^p = p\int\limits_0^\infty t^{p-1} d_f(t)dt$, beachten Sie $d_f(t) \le \min\left(\mu(X), \frac{||f||_{q,\infty}^q}{t^q}\right)$ und spalten Sie das Intergral in $\int\limits_0^\infty \dots dt = \int\limits_0^h \dots dt + \int\limits_h^\infty \dots dt$ mit $h = \mu(X)^{-\frac{1}{q}} ||f||_{q,\infty}$ auf.

Aufgabe 26 (4+2 P.) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und

$$|||f|||_{p,\infty} = \sup\left\{\mu(A)^{-\frac{1}{p'}} \int\limits_A |f| d\mu : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\right\}$$

.

Zeigen Sie:

(a) $||f||_{p,\infty} \le |||f|||_{p,\infty} \le \frac{p}{p-1} \, ||f||_{p,\infty}$,

(b) ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-endlich, so ist durch $||| \quad |||_{p,\infty}$ eine Norm auf $L^{p,\infty}(X)$ gegeben.

Bitte wenden!

Aufgabe 27 (Hardy's inequality (2), 4 P.) Es seien $1 \leq q < \infty, \rho > 0$ und $\varphi : (0,\infty) \to [0,\infty)$ eine nichtnegative meßbare Funktion. Zeigen Sie:

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty \varphi(u) du \right)^q t^{\rho-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{q}{\rho} \left(\int_0^\infty (u\varphi(u))^q \, u^{\rho-1} du \right)^{\frac{1}{q}}$$

Abgabe: 18.07.2017, in der Vorlesung,
Besprechung: 21.07.2017