Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SS 2017
30.06.2017
Blatt 10

ÜBUNGEN ZU HARMONISCHE ANALYSIS

Aufgabe 20 (4 P.) Es seien $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ und, für $\theta \in [0,1]$ sowie $F : S \to \mathbb{C}$, $M_\theta = \sup_{y \in \mathbb{R}} |F(\theta + iy)|$. Bestimmen Sie eine Funktion F mit den folgenden Eigenschaften:

(a) F ist stetig auf S und analytisch in S°,
(b) für F ist $M_0 < \infty$ und $M_1 < \infty$,
(c) F ist unbeschränkt.

Hinweis: Setzen Sie an mit $F(z) = \exp(\exp(g(z)))$, und wählen Sie g geeignet.

Aufgabe 21 (Hausdorff-Young-Ungleichung, 4 P.) Es seien G eine LCA-Gruppe, $\mathcal{F} : L^1(G) \to A(\widehat{G})$ die Fouriertransformation und $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Riesz-Thorin für $p \in [1,2]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ die Ungleichung

$$\|\mathcal{F}f\|_{p'} \leq \|f\|_p.$$

(Hierbei bezeichnet die erste Norm diejenige auf $L^{p'}(\widehat{G})$, die zweite die von $L^p(G)$.)

Aufgabe 22 (Hilbertsche Ungleichung, 2+2 P.) Es seien $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ sowie $(b_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ quadratsummierbare Folgen, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k e^{ikx}$ und $g(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell+1} b_\ell e^{i(\ell+1)x}$.

(a) Zeigen Sie:

$$\sum_{k,\ell=0}^{\infty} \frac{a_k b_\ell}{k + \ell + 1} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x f(x) g(x) dx.$$

(b) Folgern Sie mit Hilfe von Cauchy-Schwarz und Parseval/Plancherel die Hilbertsche Ungleichung

$$\sum_{k,\ell=0}^{\infty} \frac{|a_k b_\ell|}{k + \ell + 1} \leq \pi \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} |b_\ell|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 23 (4 + 3 P.) Für $f \in L^1([0,1])$ sei $Tf := (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\mu_n := \int\limits_0^1 f(x)x^n dx$.

(a) Zeigen Sie, dass hierdurch eine stetige lineare Abbildung $T : L^2([0,1]) \to \ell^2(\mathbb{N}_0)$ definiert wird, für deren Operatornorm $||T||_{2\to 2} \leq \sqrt{\pi}$ gilt.

(Hinweis: Schreiben Sie dazu $\sum\limits_{n=0}^{N} |\mu_n|^2 = \int\limits_0^1 g_N(x)\overline{f(x)}dx$ mit $g_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} \mu_n x^n$, verwenden die Cauchy-Schwarzsche sowie die Hilbertsche Ungleichung und lassen schließlich $N \to \infty$ streben.)

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Riesz-Thorin, dass $T : L^p([0,1]) \to \ell^{p'}(\mathbb{N}_0)$ für $1 \leq p \leq 2$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ stetig ist, und bestimmen Sie eine obere Schranke für die Operatornorm $||T||_{p\to p'}$.

Problem 9 (3+1+2+1+2 P.) Mit Hilfe von Lemma 2 in Abschnitt 2.2 der Vorlesung kann das Volumen Ω_n der n-dimensionalen Einheitskugel und deren Oberfläche $|S^{n-1}|$ durch die Γ-Funktion ausgedrückt werden. Zeigen und ergänzen Sie:

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \Omega_n \, \Gamma\Big(\frac{n}{2} + 1\Big)$,

(b) inbesondere gilt $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2} dx = \pi$.

(c) Der Satz von Fubini ergibt $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \pi^{\frac{n}{2}}$,

(d) so dass $\Omega_n = \dots$.

(e) Mit der Coarea-Formel (oder dem Gauss'schen Integralsatz) erhalten Sie schließlich $|S^{n-1}| = n\Omega_n = \dots$.

Abgabe: 11.07.2017, in der Vorlesung,
Besprechung: 14.07.2017