Spezielle Funktionen

Rüdiger W. Braun

Sommersemester 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Der Landausche Kalkül

1.1 Definition. Es seien f, g, h, k Funktionen auf einem Intervall $]a, \infty[$.

(a) Wir sagen $f(x) = O(g(x))$, $x \to \infty$, falls es $K > 0$ gibt, so dass $|f(x)| \leq K|g(x)|$ für alle $x > K$.

(b) Wir sagen $f(x) = o(g(x))$, falls $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ as $x \to \infty$.

(c) Wir sagen $f(x) \sim g(x)$, falls $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ für $x \to \infty$.

(d) Wir schreiben $f(x) = g(x) + h(x)O(k(x))$, wenn es einen Funktion a mit $a(x) = O(k(x))$ gibt, so dass $f(x) = g(x) + h(x)a(x)$.

1.2 Bemerkung. (a) Offensichtliche Variationen definiere ich nicht einzeln.

(b) Die Relationen $\sim$ und O sind reflexiv, die Relation $\sim$ ist symmetrisch, alle drei Relationen sind transitiv.

1.3 Beispiel. Für jedes Polynom P vom Grad $d \geq 1$ gilt $\ln|P(x)| \sim d \ln x$, $x \to \infty$.

1.4 Satz. *Die Potenzreihe* $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ *habe positiven Konvergenzradius. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j + O(z^n), \quad z \to 0.$$

Beweis. Die Potenzreihe konvergiere mindestens in $\overline{B}_{2r}(0)$. Insbesondere existiert $C = \sup_{j \in \mathbb{N}_0} |a_j|(2r)^j < \infty$. Für z mit $|z| < r$ gilt

$$\left|\sum_{j=n}^{\infty} a_j z^j\right| \leq C \sum_{j=n}^{\infty} \left|\frac{z}{2r}\right|^j = C \frac{|z|^n}{2^n r^n} \frac{1}{1 - \frac{|z|}{2r}} \leq \frac{C}{2^{n-1} r^n} |z|^n. \qquad \square$$

1.5 Beispiel. Wir suchen Lösungen der Gleichung

$$x \tan x = 1.$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Existenz einer Lösung $x_n \in]n\pi, (n + \frac{1}{2})\pi[$. Es gilt $x_n \sim n\pi$, $n \to \infty$.

Für die genauere Betrachtung machen wir den Ansatz $x_n = n\pi + h$. Dann

$$1 = x_n \tan(n\pi + h) = x_n \tan h,$$

also
$$h = \arctan \frac{1}{x_n}.$$
Daher erfüllt x_n die Gleichung
$$x_n = n\pi + \arctan \frac{1}{x_n},$$
und umgekehrt erfüllen alle Lösungen dieser Gleichung die Ausgangsgleichung.

Die Potenzreihe des Arcustangens ist
$$\arctan \xi = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\xi^{2j+1}}{2j+1}, \quad |\xi| < 1.$$
Aus der Asymptotik folgt $\frac{1}{x_n} = O(\frac{1}{n})$. Daher können wir die Asymptotik verbessern zu
$$x_n = n\pi + O\left(\frac{1}{n}\right).$$
Es gibt also a_n mit $a_n = O(\frac{1}{n})$, so dass $x_n = n\pi + a_n$. daraus folgt
$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi + a_n} = \frac{1}{n\pi} \frac{1}{1 + \frac{a_n}{n\pi}} = \frac{1}{n\pi}\left(1 + O\left(\frac{a_n}{n\pi}\right)\right) = \frac{1}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$
Beim dritten Gleichheitszeichen haben wir die Potenzreihenentwicklung der geometrischen Reihe verwendet. Also unter erneuter Verwendung der Potenzreihenentwicklung des Arcustangens
$$x_n = n\pi + \frac{1}{x_n} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) = n\pi + \frac{1}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$
Eine Fehlerabschätzung liegt nicht vor. Wir können aber z. B. die folgende Aussage machen: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt und die Folge $(x_n - n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt in jedem ℓ^p mit $p > 1$, aber nicht in ℓ^1.

2 Asymptotische Entwicklungen

2.1 Definition (Poincaré). Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{z^j}$ heißt *asymptotische Entwicklung* von f, wenn für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{z^j} + O(z^{-n})\,.$$

In diesem Fall schreibt man

$$f(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{z^j}, \quad z \to \infty.$$

2.2 Beispiel. Wie zuvor zeigt man, dass die Laurentreihe von f in ∞ eine asymptotische Entwicklung von f ist. Das ist aber nicht der einzige Fall.

Wir zeigen

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}dt \sim \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{(j-1)!}{x^j}.$$

Um dies zu sehen, erinnern wir an die Gammafunktion

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1} dt = x^\nu \int_0^\infty e^{-tx} t^{\nu-1} dt.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}dt &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\infty e^{-xt}(-t)^j dt + \int_0^\infty e^{-xt} \sum_{j=n}^{\infty} (-t)^j dt \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{j!}{x^{j+1}} + \int_0^\infty e^{-xt} \frac{t^n}{1+t} dt.\end{aligned}$$

Beim Restglied ersetzen wir den Nenner durch 1 und schätzen durch $\frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}}$ ab.

2.3 Definition. (a) Für eine Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bezeichnen wir ihr Argument $\operatorname{Im} \ln z$ mit $\operatorname{ph}(z)$.

(b) Ein *Sektor* ist eine Menge der Form

$$S(R) = \{\nu + z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq R, \varphi \leq \operatorname{ph}(z) \leq \psi\}.$$

Der Punkt ν ist die *Spitze* von $S(R)$ und $\psi - \varphi$ ist sein *Winkel*.

(c) Für zwei Funktionen $f, g\colon S(R) \to \mathbb{C}$ schreiben wir $f = O(g)$, wenn es $K \geq R$ gibt, so dass $|f(z)| \leq K|g(z)|$ für alle $z \in S(K)$.

(d) Wir schreiben $f = o(g)$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $K \geq R$ gibt, so dass $|f(z)| \leq \epsilon|g(z)|$ für alle $z \in S(K)$.

(e) Falls $f - a = o(1)$ für ein $a \in \mathbb{C}$, so schreiben

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in S}} f(z) = a \quad \text{gleichmäßig in } \mathrm{ph}(z).$$

Die Definition 2.1 macht dann auch für Funktionen Sinn, die in einem Sektor erklärt sind.

2.4 Beispiel. Die asymptotische Entwicklung

$$\int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{1+t}dt \sim \sum_{j=1}^\infty (-1)^{j-1}\frac{(j-1)!}{z^j}$$

gilt in jedem Sektor der Form $|\mathrm{ph}(z)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, $\delta > 0$.

Beweis. Man muss das Restglied aus Beispiel 2.2 für komplexe z abschätzen. Abhängig von δ gibt es $C > 0$, so dass $|z| \leq C\mathrm{Re}\, z$ für alle z mit $|\mathrm{ph}(z)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$. Damit hat man

$$\left|\int_0^\infty e^{-zt}\frac{t^n}{1+t}dt\right| \leq \int_0^\infty e^{-t\mathrm{Re}\, z}\frac{t^n}{1+t}dt \leq (\mathrm{Re}\, z)^{-n-1}n! \leq \frac{C^{n+1}}{|z|^{n+1}}n!. \qquad \square$$

2.5 Bemerkung. Das *Exponentialintegral* ist die Funktion

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt = e^{-z}\int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{1+t}dt, \quad |\mathrm{ph}(z)| < \frac{\pi}{2}.$$

Die zweite Gleichheit zeigt man mittels Substitution. Im Buch von Olver wird gezeigt, dass das Exponentialintegral eine holomorphe Fortsetzung in die geschlitzte Ebene hat.

2.6 Satz. *Es gilt genau dann*

$$f(z) \sim \sum_{j=0}^\infty \frac{a_j}{z^j} \text{ in } S, \tag{2.1}$$

falls für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in S}} z^n\left(f(z) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{a_j}{z^j}\right) = a_n \text{ gleichmäßig in } \mathrm{ph}(z). \tag{2.2}$$

Beweis. Es gelte zuerst (2.1). Zu $\epsilon > 0$ existiert $K > 0$, so dass

$$\left| f(z) - \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{z^j} \right| \leq K|z|^{-n-1}, \quad z \in S(K).$$

Sei $K_1 > \frac{K}{\epsilon}$. Dann gilt für $z \in S(K_1)$

$$\left| z^n \left(f(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{z^j} \right) - a_n \right| \leq \frac{K}{|z|} < \epsilon.$$

Die Rückrichtung ist genauso einfach. □

2.7 Korollar. *Wenn die Funktion f eine asymptotische Entwicklung im Sektor S bseitzt, dann sind die Koeffizienten eindeutig bestimmt. (Sie können aber von dem Sektor abhängen.)*

2.8 Bemerkung. Wenn sie existiert, ist die asymptotische Entwicklung also eindeutig durch die Funktion bestimmt. Die Funktion ist aber nicht eindeutig durch die asymptotische Entwicklung bestimmt. Zum Beispiel gilt offenbar für jedes $\delta > 0$

$$\exp(-z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{0}{z^j}, \quad |\varphi(z)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta.$$

2.9 Satz. *Die Funktion f sei holomorph in einer offenen Obermenge eines Sektors S. Ferner besitze sie in S eine asymptotische Entwicklung*

$$f(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{z^j}, \quad z \to \infty. \tag{2.3}$$

Dann besitzt f genau dann eine holomorphe Fortsetzung in einen Ring $A_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$, wenn die Reihe (2.3) konvergiert.

Beweis. Die Reihe besitzt genau dann eine holomorphe Fortsetzung, wenn sie eine konvergente Laurentreihe in ∞ besitzt. In diesem Fall ist mit einem Beweis analog zu dem von 1.4 die Laurentreihe gleich der asymptotischen Entwicklung. □

2.10 Beispiel. Das Exponentialintegral besitzt keine holomorphe Fortsetzung in einen Ring A_R.

2.11 Satz. *(a) Linearkombinationen von asymptotischen Entwicklungen sind asymptotische Entwicklungen.*

(b) Asymptotische Entwicklungen können multipliziert werden.

(c) Asymptotische Entwicklungen können dividiert werden.

Beweis. (b) Seien

$$f(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{z^j} \quad \text{und} \quad g(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{z^j}, \quad z \to \infty.$$

Für festes $n \in \mathbb{N}$ existieren Funktionen $F, G = O(z^{-n})$, so dass

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{z^j} + F(z) \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{z^j} + G(z).$$

Dann gilt

$$f(z)g(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} \frac{1}{z^j} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\sum_{\ell=n-k}^{n-1} b_\ell \frac{1}{z^{k+\ell}} + \frac{G(z)}{z^k} \right) + \sum_{\ell=0}^{n-1} b_\ell \frac{F(z)}{z^\ell} + F(z)G(z).$$

(c) Wir entwickeln $\frac{1}{f(z)}$ für $a_0 \neq 0$. Andernfalls erhält man einen Vorfaktor (d. h., die Reihe beginnt mit negativem j.) Setzt man $F_1(z) = f(z) - a_0$, dann gilt gilt mit $F(z)$ wie oben

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{1 + \frac{F_1(z)}{a_0}} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{a_0^{j+1}} \left(\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + F(z) \right)^j + \frac{(-1)^n F_1(z)^n}{a_0^n (a_0 + F_1(z))}. \qquad \square$$

2.12 Bemerkung. Es gelte

$$f(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{x^j}, \quad x \to \infty.$$

Durch gliedweise Integration und Integration des Restglieds bekommt man

$$\int_x^\infty \left(f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right) dt \sim \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \frac{a_4}{3x^3} + \ldots, \quad x \to \infty.$$

Durch Betrachtung des Komplements erhält man für einen festen Ausgangspunkt $p \neq 0$

$$\begin{aligned} \int_p^x f(t)dt &= \int_p^\infty \left(f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right) dt - \int_x^\infty \left(f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right) dt + a_0(x-p) + a_1 \ln \frac{x}{p} \\ &\sim A + a_0 x + a_1 \ln x - \frac{a_2}{x} - \frac{a_3}{2x^2} - \frac{a_4}{3x^3} - \ldots, \end{aligned}$$

wobei

$$A = \int_p^\infty \left(f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right) dt - a_0 p - a_1 \ln p.$$

Die gliedweise Differentiation ist dagegen nicht immer möglich. Beispielsweise besitzt $f(z) = e^{-z} \sin(e^z)$ die asymptotische Entwicklung $f(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{0}{z^j}$, $z \to \infty$, $|\mathrm{ph}(z)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, während f' keine asymptotische Entwicklung besitzt.

2.13 Satz. *Die Funktion* f *sei holomorph in einem offenen Sektor* $S(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R,\ \varphi < \mathrm{ph}(z) < \psi\}$*. Der Sektor* S_1 *sei gegeben durch* $S_1(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq R,\ \varphi_1 \leq \mathrm{ph}(z) \leq \psi_1\}$*, wobei* $\varphi < \varphi_1 < \varphi_1 < \psi$*, und* f *besitze in* S_1 *eine asymptotische Entwicklung* $f \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{z^j}$*,* $z \to \infty$*. Für* φ_2*,* ψ_2 *mit* $\varphi_1 < \varphi_2 < \psi_2 < \psi_1$ *sei der Sektor* S_2 *gegeben durch* $S_2(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R,\ \varphi_2 < \mathrm{ph}(z) < \psi_2\}$*. Dann besitzt* f' *in* S_2 *die asymptotische Entwicklung*

$$f'(z) \sim \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-j a_j}{z^{j+1}}, \quad z \to \infty.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben. Dann existiert eine holomorphe Funktion g mit $g(z) = O(z^{-n})$, $z \to \infty$ für $z \in S_1$, so dass

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{z^j} + g(z).$$

Ableitung ergibt sofort

$$f'(z) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{-j a_j}{z^{j+1}} + g'(z).$$

Wir schätzen g' mit der Cauchyschen Integralformel ab. Es gibt $\delta > 0$, so dass $\overline{B}_{\delta|z|}(z) \subset S_1$ für alle hinreichend großen $z \in S_2$. Für solch ein z gilt

$$|g'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\delta|z|}(z)^+} \frac{g(\zeta)}{(z-\zeta)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi\delta|z| \frac{K(1-\delta)^{-n}|z|^{-n}}{\delta^2|z|^2} = K_1|z|^{-n-1}. \quad \square$$

3 Die Γ-Funktion

In der Analysis I wird die Γ-Funktion definiert durch das Eulersche Integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0.$$

3.1 Satz. *Für z mit $\operatorname{Re} z > 0$ konvergiert das Eulersche Integral gegen eine holomorphe Funktion, die ebenfalls mit Γ bezeichnet wird.*

Mittels partieller Integration zeigt man $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ für alle z mit $\operatorname{Re} z > 0$. Wegen $\Gamma(1) = 1$ folgt hieraus $\Gamma(n+1) = n!$.

Wir wollen nun eine Darstellung von Γ als unendliches Produkt herleiten. Dazu setzen wir hilfsweise für $n \in \mathbb{N}$ und $\operatorname{Re} z > 0$

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt.$$

3.2 Lemma.

$$\Gamma_n(z) = \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

Beweis. Mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
\Gamma_n(z) &= \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{t^z}{z}\bigg|_0^n + \frac{1}{z}\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} t^z dt \\
&= \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \frac{t^{z+1}}{z(z+1)}\bigg|_0^n + \frac{1}{z(z+1)} \frac{n-1}{n} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} t^{z+1} dt \\
&= \frac{(n-1)\dots(n-(n-1))}{z(z+1)\dots(z+n-1)n^{n-1}} \int_0^n t^{z+n-1} dt \\
&= \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n-1)n^n} \frac{t^{z+n}}{z+n}\bigg|_0^n \\
&= \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}.
\end{aligned}$$

□

3.3 Lemma. *Für z mit $\operatorname{Re} z > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(z) = \Gamma(z)$.*

Beweis. Für $x > -1$ gilt $\ln(1+x) < x$ und daher

$$\left| \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \right| \le e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1}.$$

Diese Funktion ist integrierbar über $]0, \infty[$. Daher folgt die Behauptung aus dem Lebesgueschen Grenzwertsatz. □

3.4 Satz (Euler). *Für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ wird durch*

$$z \mapsto \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

eine holomorphe Funktion gegeben, welche die Gammafunktion fortsetzt und daher ebenfalls mit Γ bezeichnet wird.

Beweis. Sei $z \notin -\mathbb{N}_0$ und sei ein $m > -\operatorname{Re} z$ gewählt. Dann

$$\begin{aligned}\frac{(n-m)!(n-m)^m}{n!} &= \frac{1\dots(n-m)(n-m)\dots(n-m)}{1\dots(n-m)(n-m+1)\dots n} \\ &= \frac{(n-m)\dots(n-m)}{n-m+1)\dots n} \to 1, \quad n\to\infty,\end{aligned}$$

wobei die Brüche so gemeint sind, dass Zähler und Nenner gleich viele Faktoren haben. Daraus folgt dann sofort

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-m)!(n-m)^{z+m}}{n!n^z} = 1$$

und hieraus

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \\ &\quad = \frac{1}{z(z+1)\dots(z+m-1)} \lim_{n\to\infty} \frac{(n-m)!(n-m)^{z+m}}{(z+m)(z+m+1)\dots(z+n)} \\ &\quad = \frac{1}{z(z+1)\dots(z+m-1)} \lim_{k\to\infty} \frac{k!k^{z+m}}{(z+m)(z+m+1)\dots(z+m+k)} \\ &\quad = \frac{1}{z(z+1)\dots(z+m-1)}\Gamma(z+m).\end{aligned}$$

Wir sehen, dass das Produkt konvergiert und die Grenzfunktion holomorph ist. □

Ich erinnere an den Konvergenzbegriff für unendliche Produkte.

3.5 Definition. Sei $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Man sagt, dass das Produkt $\prod_{j=1}^\infty z_j$ konvergiert, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $L = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=m}^n z_j$ existiert und von 0 verschieden ist. In diesem Fall setzt man $\prod_{j=1}^\infty z_j = L \prod_{j=1}^{m-1} z_j$.

Bezeichnung. Für einen metrischen Raum X, ein Kompaktum $K \subset X$ und eine beschränkte Funktion f auf K setzen wir $\|f\|_K = \sup_{x\in K}|f(x)|$.

3.6 Definition. Es sei X ein metrischer Raum und es sei $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_j\colon X \to \mathbb{C}$. Man sagt, dass das Produkt $\prod_{j=1}^\infty f_j$ *normal konvergiert*, wenn $\sum_{j=1}^\infty \|f_j - 1\|_K < \infty$ für jede kompakte Teilmenge K von X.

3.7 Lemma. *Das Produkt $\prod_{j=1}^\infty f_j$ sei normal konvergent. Dann*

(a) *existiert für jedes* $x \in X$ *das Produkt* $\prod_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ *im Sinne von Definition 3.5,*

(b) *konvergiert die Funktionenfolge* $(\prod_{j=1}^{n} f_j)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig auf den kompakten Teilmengen von* $\mathbb{C}$ *gegen* $x \mapsto \prod_{j=1}^{\infty} f_j(x)$. *Die Grenzfunktion ist holomorph.*

3.8 Definition. Die *Euler-Mascheroni Konstante* ist definiert als

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \right) - \ln n.$$

3.9 Satz (Weierstrass). *Für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{j=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-z/j} \right).$$

Das Produkt ist normal konvergent. Insbesondere ist $\frac{1}{\Gamma}$ *eine ganze Funktion.*

Beweis. Die Definition von Γ schreibt man sofort um zu

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} z \exp\left(z \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) \right) \prod_{j=1}^{n} \left(\left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-z/j} \right).$$

Um die normale Konvergenz des Produktes zu zeigen, sei ohne Einschränkung $K = \overline{B}_n(0)$. Dann gilt für $j \geq 2n$ und $z \in K$

$$\left| \ln\left(1 + \frac{z}{j}\right) - \frac{z}{j} \right| = \left| \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell} \left(\frac{z}{j}\right)^{\ell} - \frac{z}{j} \right| \leq \left| \frac{z}{j} \right|^2 \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{1}{\ell} \left(\frac{z}{j}\right)^{\ell-2} \leq \left| \frac{z}{j} \right|^2.$$

Für $|\zeta| \leq \frac{1}{2}$ und die Exponentialfunktion argumentiert man genauso

$$|\exp(\zeta) - 1| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\zeta^j}{j!} \right| \leq 2|\zeta|.$$

Insgesamt also

$$\left| \left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-z/j} \right| \leq 2 \frac{|z|^2}{j^2}.$$

□

Wir benötigen die Produktdarstellung des Sinus.

3.10 Satz.

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right).$$

3.11 Satz (Spiegelungsformel).

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!n^z}\frac{(1-z)(2-z)\dots(n+1-z)}{n!n^{1-z}}\right)\\ &= z\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-z}{n}\frac{(1-z^2)(2^2-z^2)\dots(n^2-z^2)}{(n!)^2} = z\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{j^2}\right). \quad \square\end{aligned}$$

3.12 Korollar. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

3.13 Lemma. *Für ein* $\epsilon > 0$ *sei* $U = \{x+iy \in \mathbb{C} \mid |y| < \epsilon, x < \epsilon\}$ *und es sei* f *holomorph in* $U \setminus]-\infty, 0]$. *Es gebe* $\alpha, R > 0$, *so dass* $|f(z)| \leq R|z|^{-1-\alpha}$ *für alle* $z \in U \setminus]-\infty, 0]$ *mit* $\operatorname{Re} z \leq -R$. *Für* $0 < c < \epsilon$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *sei ein Weg* γ_n *gegeben durch*

$$\gamma_n(t) = \begin{cases} 1+c+t-ic, & -n \leq t < -1,\\ c+itc, & -1 \leq t < 1,\\ c-t+1+ic, & 1 \leq t \leq n. \end{cases}$$

Dann existiert $\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n} f$ *und hängt nicht von der Wahl von* c *ab.*

Beweis. Existenz: Für $n > m$ gilt

$$\left|\int_{\gamma_n} f - \int_{\gamma_m} f\right| \leq \left|\int_{-n-ic}^{-m-ic} f\right| + \left|\int_{-n+ic}^{-m+ic} f\right| \leq 2\int_m^n Rt^{-1-1\alpha}dt \leq 2\frac{R}{\alpha}m^{-\alpha}.$$

Daher folgt die Konvergenz aus dem Cauchy-Kriterium.

Unabhängigkeit von c: Für festes n und zwei verschiedene c_1, c_2 besteht wegen des Cauchyschen Integralsatzes die Differenz der Wegintegral aus der Summe der beiden Wegintegrale von $-m-ic_i$ nach $-m-ic_2$ bzw. von $-m+ic_1$ nach $-m+ic_2$. $\square$

3.14 Definition. Ein solches Integral bezeichnet man als *Hankelsches Schleifenintegral.* Man schreibt

$$\int_{-\infty}^{(0+)} f$$

für den Grenzwert.

3.15 Satz (Hankelsches Schleifenintegral für die Gammafunktion). *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} w^{-z}e^w dw$$

und für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ *gilt*

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2i\sin(\pi z)}\int_{-\infty}^{(0+)} w^{z-1}e^w dw.$$

Dabei ist $w^{-z} = e^{-z\ln w}$, *wobei* $\ln$ *der Hauptzweig des Logarithmus ist.*

Beweis. Wir setzen $I(z) = \int_{-\infty}^{(0+)} w^{-z} e^w dw$. Der Grenzübergang $n \to \infty$ in Lemma 3.13 erfolgt gleichmäßig auf den kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$, daher ist I holomorph.

Wir zeigen die Behauptungen zuerst für $\operatorname{Re} z < 1$. Dann konvergiert der Anteil des Weges in der rechten Halbebene für $c \to 0$ gegen 0. Die beiden anderen Anteile des Weges konvergieren gegen jeweils gegen ein Integral über die negative reelle Achse, wobei aber die Zweigwahl beachtet werden muss. Wir erhalten

$$\begin{aligned} I(z) = \int_{-\infty}^{0} e^{-z(\ln(|x|)-i\pi)} e^x dx - \int_0^\infty e^{-z(\ln(x)+i\pi)} e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-z\ln x} e^{-x} \left(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right) dx \\ = 2i\sin(\pi z) \int_0^\infty x^{-z} e^{-x} dx = 2i\sin(\pi z)\Gamma(1-z) = \end{aligned}$$

Damit ist die zweite Aussage gezeigt. Zur ersten komme ich mit der Spiegelungsformel. □

3.16 Definition. Die logarithmische Ableitung der Gammafunktion ist die *Digammafunktion*, geschrieben

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

4 Besselfunktionen erster Art

4.1 Definition. Die für $\nu \in \mathbb{C}$ bezeichnet man die Differentialgleichung

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{4.1}$$

als *Besselsche Differentialgleichung*.

Für $\nu = n \in \mathbb{N}_0$ findet man eine Lösung durch Potenzreihenansatz, nämlich

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j}.$$

Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist unendlich. Daher ist J_n für $n \in \mathbb{N}_0$ eine ganze Funktion.

4.2 Definition. Für $\nu \in \mathbb{C}$ wird durch

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(\nu+j+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j}$$

die *Besselfunktion erster Art* der Ordnung ν gegeben.

Die Reihe $\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(z)$ konvergiert gleichmäßig in z auf den kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$ und für festes z konvergiert die Reihe $J_\nu(z)$ gleichmäßig in ν auf den kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$.

4.3 Satz. *J_ν und $J_{-\nu}$ lösen die Besselsche Differentialgleichung (4.1).*

Beweis.

$$\begin{aligned}
&z^2 J_\nu''(z) + zJ_\nu'(z) + (z^2 - \nu^2)J_\nu(z) \\
&\quad = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j(2j+\nu)(2j+\nu-1)}{j!\Gamma(\nu+j+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+\nu} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j(2j+\nu)}{j!\Gamma(\nu+j+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+\nu} \\
&\qquad + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4(-1)^j}{j!\Gamma(\nu+j+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+\nu+2} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\nu^2(-1)^j}{j!\Gamma(\nu+j+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+\nu} \\
&\qquad = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \left(\frac{\nu(\nu-1)}{\Gamma(\nu+1)} + \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} - \frac{\nu^2}{\Gamma(\nu+1)}\right) \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j+1)} \left((2j+\nu)(2j+\nu-1) + (2j+\nu) - 4j(j+\nu) - \nu^2\right) \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+\nu} = 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

Für $\nu \notin \mathbb{Z}$ bilden also J_ν und $J_{-\nu}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Besselschen Differentialgleichung.

4.4 Satz (Schläflisches Schleifenintegral).

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{-\infty}^{(0+)} \exp\left(w - \frac{z^2}{4w}\right)\frac{dw}{w^{\nu+1}}.$$

Beweis. Aus dem Hankelschen Schleifenintegral folgt

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{j!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2j} \int_{-\infty}^{(0,+)} e^w w^{-\nu-j-1} dw.$$

Ersetzt man alle Terme durch ihren Absolutbetrag, so konvergiert die Reihe immer noch. Der Lebesguesche Grenzwertsatz gestattet daher die Vertauschung von Reihe und Intergral.

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{-\infty}^{(0,+)} e^w w^{-\nu-1} \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{j!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2j} w^{-j} dw. \qquad \square$$

4.5 Satz (Schläfli-Sommerfeldsches Integral). *Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ und alle $\nu \in \mathbb{C}$ gilt*

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty-\pi i}^{\infty+\pi i} e^{z\sinh\tau - \nu\tau} d\tau.$$

Dabei verläuft der Integrationsweg zuerst entlang $\mathbb{R} - i\pi$ bis zu einem endlichen Punkt $x - i\pi$, dann von dort zu $x + i\pi$ und dann entlang $\mathbb{R} + i\pi$.

Beweis. Die Substitutionsregel aus der Funktionentheorie lautet

$$\int_{\varphi\circ\gamma} f = \int_\gamma (f\circ\varphi)\varphi'.$$

Wir beweisen zuerst ein Zwischenergebnis für $z > 0$. Sei γ die Hankelsche Schleife, sei $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $w \mapsto \frac{1}{2}zh$ und sei f der Integrand aus dem Schläfllischen Schleifenintegral. Dann

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} \exp\left(\frac{z}{2}\left(h - \frac{1}{h}\right)\right)\frac{dh}{h^{\nu+1}}. \tag{4.2}$$

Dieses Integral existiert für alle z mit $\operatorname{Re} z > 0$ und definiert dort eine holomorphe Funktion. Die Formel (4.2) gilt also in der rechten Halbebene. Um hieraus die Behauptung zu gewinnen, muss die Substitutionsregel auf den unteren und den oberen Teilweg des Hankelschen Schleifenwegs einzeln angewandt werden. Sei also γ die untere Hälfte und sei φ der auf $\mathbb{C} \setminus i[0,\infty[$ durch $\varphi(1) = 0$ erklärte Zweig des Logarithmus. Dann ist $\varphi\circ\gamma$ die untere Hälfte des Integrationsweg aus dem Schläfli-Sommerfeldeschen Integral. Mit f bezeichnen wir den zugehörigen Integranden. Dann

$$f(\varphi(h))\varphi'(h) = \exp\left(\frac{z}{2}\left(h - \frac{1}{h}\right)\right)\frac{1}{h^\nu}\frac{1}{h}.$$

Für die obere Hälfte erhält man denselben Integranden. $\square$

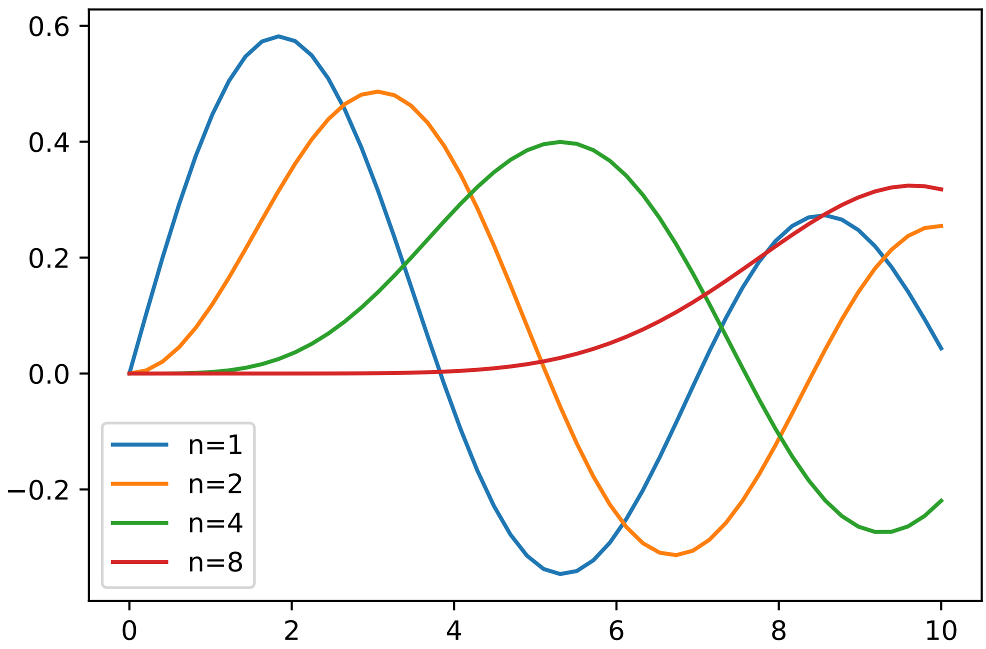

Abbildung 4.1: Graphen einiger Besselfunktionen J_n

4.6 Satz (3-Term Relationen für J_ν). *Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ und alle $\nu \in \mathbb{C}$ gilt*

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z).$$

Beweis. Folgt aus dem Schläfli-Sommerfeldschen Integral. □

Bemerkung.

$$\frac{J_\nu(z)}{J_{\nu-1}(z)} = \frac{J_\nu(z)}{\frac{2\nu}{z} J_\nu(z) - J_{\nu+1}(z)} = \frac{1}{\frac{2\nu}{z} - \frac{J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)}} = \frac{1}{\frac{2\nu}{z} - \frac{1}{\frac{2(\nu+1)}{z} - \frac{J_{\nu+2}(z)}{J_{\nu+1}(z)}}}.$$

Das ist der Anfang einer Kettenbruchentwicklung.

4.7 Satz. *Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ und alle $\nu \in \mathbb{C}$ gilt*

$$J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_\nu(z).$$

Beweis. Als Übung. □

Die Graphen einiger Besselfunktionen zeigt Abbildung 4.1.

5 Hankelfunktionen

5.1 Satz (Hankel). *Für $\nu \in \mathbb{C}$ setze*

$$a_0(\nu) = 1, \qquad a_j(\nu) = \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)\dots(4\nu^2 - (2j-1)^2)}{j!8^j}.$$

Dann gilt für jedes $\delta > 0$

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\cos\omega \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{a_{2j}(\nu)}{z^{2j}} - \sin\omega \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{a_{2j+1}(\nu)}{z^{2j+1}} \right), \quad |\mathrm{ph}(z)| \le \frac{\pi}{2} - \delta,$$

wobei $\omega = z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}$. Die Konstanten in den O-Abschätzungen können lokal gleichmäßig in ν gewählt werden.

Das werden wir später durch asymptotische Entwicklung des Schläfli-Sommerfeldschen Schleifenintegrals zeigen.

5.2 Satz. *Für $\nu \notin \mathbb{Z}$ bilden J_ν und $J_{-\nu}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Besselschen Differentialgleichung. Für $\nu \in \mathbb{Z}$ tun sie das nicht.*

Beweis. Unterschiede können nur aus den trogonometrischen Termen kommen.

$$\cos(z + \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}) = \cos(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})\cos(\pi\nu) - \sin(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})\sin(\pi\nu).$$

Das bedeutet, dass der Quotient aus dem ω für ν und dem ω für $-\nu$ genau dann unabhängig von z ist, wenn $\nu \in \mathbb{Z}$. Für den Sinus-Term gilt dasselbe. □

5.3 Definition. Für $\nu \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}\setminus$ sind die beiden *Hankelfunktionen* definiert durch

$$H_\nu^{(1)} = \lim_{\mu \to \nu} \frac{i(e^{-\mu\pi i} J_\mu(z) - J_{-\mu}(z))}{\sin(\mu\pi)},$$
$$H_\nu^{(2)} = -\lim_{\mu \to \nu} \frac{i(e^{\mu\pi i} J_\mu(z) - J_{-\mu}(z))}{\sin(\mu\pi)}.$$

5.4 Satz. *(a) Die beiden Grenzwerte existieren.*

(b) Die Hankelfunktionen sind holomorph in ν.

(c) Die Hankelfunktionen lösen die Besselsche Differentialgleichung.

Beweis. Wir setzen $\mu = n + a$ für ein $a \in \mathbb{Z}$. Dann

$$\begin{aligned}
&e^{-\mu\pi i} J_\mu(z) - J_{-\mu}(z)\\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{e^{-\mu\pi i}}{\Gamma(\mu + j + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+\mu} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{1}{\Gamma(-\mu + j + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j-\mu}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+n} e^{-a\pi i}}{j!\Gamma(n + j + a + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+n+a} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(-n + j + 1 - a)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j-n-a}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+n} e^{-a\pi i}}{j!\Gamma(n + j + a + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+n+a} - \sum_{\ell=-n}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+n}}{(\ell + n)!\Gamma(\ell + 1 - a)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\ell+n-a}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+n} \left(\frac{e^{-a\pi i} z^a}{j!\Gamma(n + j + a + 1) 2^a} - \frac{z^{-a}}{(j + n)!\Gamma(j + 1 - a) 2^{-a}} \right) \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+n}\\
&\quad - \sum_{\ell=-n}^{-1} \frac{(-1)^{\ell+n}}{(\ell + n)!\Gamma(\ell + 1 - a)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\ell+n-a}.
\end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig in μ auf den kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$. Alle Summanden in den letzten beiden Zeilen konvergieren für $a \to 0$ gegen 0. Die Ausgangsfunktion besitzt also eine Nullstelle in $\mu = n$. Daher besitzt $H_\mu^{(1)}(z)$ eine holomorphe Fortsetzung nach n. Für $H_n^{(2)}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ argumentiert man genauso. Schließlich haben die Hankelfunktionen noch Spiegelungsformeln, die wir für $\mu \notin \mathbb{Z}$ wie folgt sehen

$$H_{-\mu}^{(1)}(z) = -\frac{i(e^{\mu\pi i} J_{-\mu}(z) - J_\mu(z))}{\sin(\mu\pi)} = -e^{\mu\pi i} \frac{e^{-\mu\pi i} J_\mu(z) - J_{-\mu}(z)}{\sin(\mu\pi)} = e^{\mu\pi i} H_\mu^{(1)}(z).$$

Daraus erhalten wir die holomorphe Fortsetzbarkeit des Quotienten nach $-n$ für $n \in \mathbb{N}$, und (a) und (b) sind gezeigt.

Für festes z und $j = 1, 2$ ist die Funktion

$$\mu \mapsto z^2 \left(H_\mu^{(j)}\right)'' (z) + z \left(H_\mu^{(j)}\right)' (z) + \left(x^2 - \mu^2\right) H_\mu^{(j)}(z)$$

holomorph in μ. Da sie in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ verschwindet, verschwindet sie überall. □

Die *Sommerfeld-Pfade* $S_\pm$ werden gegeben durch

$$S_+(t) = t + i\left(\frac{\pi}{2} + \arctan t\right), \qquad S_-(t) = -t + i\left(-\frac{\pi}{2} + \arctan t\right).$$

5.5 Lemma. *Für* $\nu \in \mathbb{C}$ *und* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $\operatorname{Re} z > 0$ *gilt*

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_+ \boxplus S_-} e^{z \sinh \tau - \nu\tau} d\tau.$$

Beweis. Das ist das Schläfli-Sommerfeldsche Integral. □

5.6 Satz. *Für* $\nu \in \mathbb{C}$ *und* $\operatorname{Re} z > 0$ *gelten*

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{S_+} e^{z \sinh \tau - \nu\tau} d\tau,$$
$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{S_-} e^{z \sinh \tau - \nu\tau} d\tau.$$

Beweis. Wir bezeichnen die rechten Seiten mit $C_\nu^+(z)$ und $C_\nu^-(z)$. Die Substitution $\tau = -t + i\pi$ bildet S_+ auf S_+ ab, kehrt aber den Durchlaufsinn um. Also

$$C_{-\nu}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{S_+} e^{z \sinh \tau + \nu\tau} d\tau = \frac{1}{\pi i} \int_{S_+} e^{z \sinh(-t+i\pi) + \nu(-t+i\pi)} d\tau = e^{i\pi\nu} C_\nu^+(z).$$

Die Substitution $\tau = -t - i\pi$ bildet S_- auf S_- ab und führt analog zu $C_{-\nu}^-(z) = e^{-i\pi\nu} C_\nu^-(z)$. Für $\nu \notin \mathbb{Z}$ gilt folglich

$$\begin{aligned} i(e^{-\nu\pi i} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)) &= \frac{i}{2}(e^{-\nu\pi i} C_\nu^+(z) + e^{-\nu\pi i} C_\nu^-(z) - e^{\nu\pi i} C_\nu^+(z) - e^{-\nu\pi i} C_\nu^-(z)) \\ &= \sin(\nu\pi) C_\nu^+(z). \end{aligned}$$

Für $H_\nu^{(2)}$ argumentiert man analog. □

6 Das Lemma von Watson

6.1 Theorem. *Sei* f *eine Borel-messbare Funktion, so dass es* $s_0 \geq 0$ *und* $\epsilon, C, \beta > 0$ *gibt, so dass für alle* $x > 0$

$$|f(x)| \leq C\left(x^{-(1-\epsilon)} + e^{s_0 x^\beta}\right).$$

Ferner besitze f *für geeignete* $\lambda, \mu > 0$ *auf der positiven reellen Achse die asymptotische Entwicklung*

$$f(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{(j+\lambda-\mu)/\mu}, \quad x \to 0.$$

Dann existiert das uneigentliche Integral

$$Q(s) = \int_0^\infty e^{-sx^\beta} f(x)dx$$

für $s > s_0$ *und besitzt die asymptotische Entwicklung*

$$Q(s) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{\beta}\Gamma\left(\frac{j+\lambda}{\beta\mu}\right) s^{-(j+\lambda)/(\beta\mu)}, \quad s \to \infty.$$

Beweis. Die Existenz des Integrals ist sofort klar. Macht man die Substitution $t = sx^\beta$, so erhält man

$$Q(s) = \frac{s^{-1/\beta}}{\beta}\int_0^\infty e^{-t} f\left(\left(\frac{t}{s}\right)^{1/\beta}\right) t^{-1+1/\beta}dt.$$

Für $N \in \mathbb{N}$ erklären wir R_N durch

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j x^{(j+\lambda-\mu)/\mu} + R_N(x)$$

und Q_N durch

$$Q_N(s) = \frac{s^{-1/\beta}}{\beta}\int_0^\infty e^{-t} R_N\left(\left(\frac{t}{s}\right)^{1/\beta}\right) t^{-1+1/\beta}dt.$$

Sei $\epsilon > 0$ hinreichend klein. Nach Voraussetzung existieren Konstanten, so dass

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &\leq C_N x^{(N+\lambda-\mu)/\mu}, && x \in [0, \epsilon[, \\ |R_N(x)| &\leq \widetilde{C}_N e^{s_0 x^\beta}, && x \in [\epsilon, \infty[. \end{aligned}$$

Q_N zerfällt in zwei Teile

$$\frac{1}{\beta s^\beta}\int_0^{s\epsilon^\beta} e^{-t} R_N\left(\left(\frac{t}{s}\right)^{1/\beta}\right) t^{-1+1/\beta} dt \le \frac{C_N}{\beta s^{1/\beta}}\int_0^{s\epsilon^\beta} e^{-t}\left(\frac{t}{s}\right)^{(N+\lambda-\mu)/(\mu\beta)} t^{-1+1/\beta} dt$$
$$\le \frac{C_N}{\beta} s^{-(N+\lambda)/(\mu\beta)} \int_0^\infty e^{-t} t^{(N+\lambda)/(\mu\beta)-1} dt = \frac{C_N}{\beta} s^{-(N+\lambda)/(\mu\beta)} \Gamma\left(\frac{N+\lambda}{\mu\beta}\right)$$

und für $s \ge 2s_0$

$$\frac{1}{\beta s^\beta}\int_{s\epsilon^\beta}^{\infty} e^{-t} R_N\left(\left(\frac{t}{s}\right)^{1/\beta}\right) t^{-1+1/\beta} dt \le \frac{\widetilde{C}_N}{\beta s^{\beta}}\int_{s\epsilon^\beta}^{\infty} e^{-t}\exp\left(s_0\frac{t}{s}\right) t^{-1+1/\beta} dt$$
$$\le \frac{\widetilde{C}_N}{\beta s^{\beta}}\int_{s\epsilon^\beta}^{\infty} e^{-t/2} t^{-1+1/\beta} dt \le \frac{C_{2,N}}{\beta s^{\beta}}\int_{s\epsilon^\beta}^{\infty} e^{-t/3} dt = \frac{C_{2,N}}{\beta s^{\beta}} e^{-s\epsilon^\beta/3}.$$

Jetzt muss man nur noch zusammensetzen. □

6.2 Korollar. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 6.1 gilt für jedes* $b > 0$

$$\int_0^b e^{-sx^\beta} f(x) dx \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{\beta}\Gamma\left(\frac{j+\lambda}{\beta\mu}\right) s^{-(j+\lambda)/(\beta\mu)}, \quad s \to \infty.$$

Durch direkte Abschätzung erklären!

6.3 Theorem. *Sei* f *eine Borel-messbare Funktion, so dass es* $s_0 \ge 0$ *und* $\epsilon, C, \beta > 0$ *gibt, so dass für alle* $x > 0$

$$|f(x)| \le C\left(x^{-(1-\epsilon)} + e^{s_0 x^\beta}\right).$$

Ferner besitze f *für geeignete* $\lambda, \mu > 0$ *auf der positiven reellen Achse die asymptotische Entwicklung*

$$f(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{(j+\lambda-\mu)/\mu}, \quad x \to 0.$$

Dann wird durch

$$Q(s) = \int_0^\infty e^{-sx^\beta} f(x) dx$$

eine holomorphe Funktion in $\{s \mid \operatorname{Re} s > s_0\}$ *gegeben. Für jedes* $\delta > 0$ *besitzt sie in dem durch* $|\mathrm{ph}(z| \le \frac{\pi}{2} - \delta$ *gegebenen Sektor die asymptotische Entwicklung*

$$Q(s) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{\beta}\Gamma\left(\frac{j+\lambda}{\beta\mu}\right) s^{-(j+\lambda)/(\beta\mu)}, \quad s \to \infty.$$

Beweis. Die Existenz des Integrals ist sofort klar. Für $N \in \mathbb{N}$ erklären wir R_N durch

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j x^{(j+\lambda-\mu)/\mu} + R_N(x)$$

und Q_N durch

$$Q_N(s) = \int_0^\infty e^{-sx^\beta} R_N(x)\,dx.$$

Macht man die Substitution $t = |s|x^\beta$, so erhält man

$$Q_N(s) = \frac{1}{\beta|s|^{1/\beta}} \int_0^\infty e^{-st/|s|} R_N\left(\left(\frac{t}{|s|}\right)^{1/\beta}\right) t^{-1+1/\beta} dt.$$

Daher gilt für $s = |s|e^{i\varphi}$ mit $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$

$$|Q_N(s)| \leq \frac{1}{\beta|s|^{1/\beta}} \int_0^\infty e^{-t\cos\varphi} \left| R_N\left(\left(\frac{t}{|s|}\right)^{1/\beta}\right)\right| t^{-1+1/\beta} dt.$$

Sei $\epsilon > 0$ hinreichend klein. Nach Voraussetzung existieren Konstanten, so dass

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &\leq C_N x^{(N+\lambda-\mu)/\mu}, && x \in [0, \epsilon[, \\ |R_N(x)| &\leq \widetilde{C}_N e^{s_0 x^\beta}, && x \in [\epsilon, \infty[. \end{aligned}$$

Q_N zerfällt in zwei Teile

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\beta|s|^\beta} \int_0^{|s|\epsilon^\beta} e^{-t\cos\varphi} R_N\left(\left(\frac{t}{|s|}\right)^{1/\beta}\right) t^{-1+1/\beta} dt \\ &\qquad \leq \frac{C_N}{\beta|s|^{1/\beta}} \int_0^{|s|\epsilon^\beta} e^{-t\sin\delta} \left(\frac{t}{|s|}\right)^{(N+\lambda-\mu)/(\mu\beta)} t^{-1+1/\beta} dt \\ &\qquad\qquad \leq \frac{C_N}{\beta} |s|^{-(N+\lambda)/(\mu\beta)} \int_0^\infty e^{-t\sin\delta} t^{(N+\lambda)/(\mu\beta)-1} dt \end{aligned}$$

und für $s \geq 2s_0$

$$\frac{1}{\beta s^\beta} \int_{s\epsilon^\beta}^\infty e^{-t\cos\varphi} R_N\left(\left(\frac{t}{s}\right)^{1/\beta}\right) t^{-1+1/\beta} dt \leq \frac{\widetilde{C}_N}{\beta s^\beta} \int_{s\epsilon^\beta}^\infty e^{-t\cos\varphi} \exp\left(s_0 \frac{t}{s}\right) t^{-1+1/\beta} dt.$$

Dieses Integral konvergiert für $\operatorname{Re} s > s_0$. Man muss die Gleichmäßigkeit nachhalten. Bei der Berechnung der Koeffizienten der asymptotischen Entwicklung verwenden wir dagegen die Substitution aus dem Beweis vonTheorem 6.1. Dabei verdreht sich der Integrationweg, was wir durch Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes wieder beheben. □

6.4 Theorem. *Die Funktion* f *sei analytisch in* $S = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \gamma_- < \mathrm{ph}(z) < \gamma_+\}$ *für geeignete* $\gamma_- < 0 < \gamma_+$. *Ferner gebe es* $\beta > 0$ *und* $s_0 \geq 0$, *so dass es für jedes hinreichend kleine* $\delta > 0$ *Konstanten* $C, \epsilon > 0$ *gibt, so dass*

$$|f(z)| \leq C\left(|z|^{-(1-\epsilon)} + e^{|z|^\beta s_0}\right)$$

für alle

$$z \in S_\delta := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \gamma_- + \delta < \mathrm{ph}(z) < \gamma_+ - \delta\}.$$

Wir setzen ferner voraus, dass f *in* S_δ *eine asymptotische Entwicklung der Form*

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{(n+\lambda-\mu)/\mu}, \quad z \to 0,$$

besitzt. Dann besitzt für jedes $\gamma \in]\gamma_-, \gamma_+[$ *die für* $s > s_0$ *durch*

$$Q(s) = \int_0^\infty e^{-x^\beta s} f(x)dx$$

gegebene Funktion eine holomorphe Fortsetzung nach

$$\left\{w = e^{-i\gamma\beta}s \mid \mathrm{Re}\, s > s_0\right\}$$

In jedem Sektor der Form $\left\{s \in \mathbb{C} \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} - \beta\gamma_+ + \delta \leq \mathrm{ph}(s) \leq \frac{\pi}{2} - \beta\gamma_- - \delta\right\}$ *hat* Q *die asymptotische Entwicklung*

$$Q(s) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\beta} \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\beta\mu}\right) s^{-(n+\lambda)/(\beta\mu)}.$$

Beweis. Wir machen das nur für $|\beta\gamma_\pm| < \frac{\pi}{2}$. Im anderen Fall muss man den Beweis iterieren. Wir fixieren γ mit $\gamma_- < \gamma < \gamma_+$ und setzen $\alpha(t) = e^{i\gamma}t$. Für $s = re^{-i\gamma\beta}$ folgt aus der Cauchyschen Integralformel

$$Q(s) = \int_\alpha e^{-x^\beta s} f(x)dx = e^{i\gamma} \int_0^\infty \exp\left(-e^{i\gamma\beta}t^\beta\right) f(e^{i\gamma}t)dt.$$

Setzt man $\widetilde{f}(x) = f(e^{i\gamma}x)$ und $\widetilde{Q}(s) = \int_0^\infty e^{-x^\beta s}\widetilde{f}(x)dx$, so haben wir gezeigt, dass $Q(s) = e^{i\gamma}\widetilde{Q}(e^{i\beta\gamma}s)$. Da $\widetilde{f}$ die Voraussetzungen von Theorem 6.3 erfüllt, besitzt $\widetilde{Q}(\widetilde{s})$ eine Fortsetzung nach $\{\mathrm{Re}\,\widetilde{s} > s_0\}$. Die asymptotische Entwicklung von $\widetilde{Q}$ hat die Koeffizienten

$$\widetilde{q}_n = \frac{\widetilde{a}_n}{\beta}\Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\beta\mu}\right),$$

wobei $\widetilde{a}_n = a_n e^{i\gamma(n+\lambda-\mu)/\mu}$. Also $\widetilde{q}_n = q_n$. □

6.5 Definition. Der *Areasinus hyperbolicus* ist die Umkehrfunktion des Sinus hyperbolicus, also $\mathrm{Arsinh} = \sinh^{-1}$.

6.6 Lemma.
$$\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

6.7 Beispiel. Auf Blatt 5 war für $\nu \in \mathbb{C}$ und s mit $\operatorname{Re} s > 0$ das folgende Integral aufgetreten
$$Q(s) = \int_0^\infty e^{-\nu x - s\sinh(x)} dx.$$
Wir bestimmen die ersten beiden Terme der Entwicklung. Man beachte, dass das andere Integral von Blatt 5 dieser Methode nicht ohne weiteres zugänglich ist. Zuerst substituieren wir $t = \sinh(x)$
$$Q(s) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{e^{-\nu \operatorname{Arsinh}(t}}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

Das Integral besitzt die gewünschte Form. Der Faktor f ist holomorph in der Einheitskreisscheibe; daher liefert seine Taylorreihe die gewünschte asymptotische Entwicklung. Wegen $f(0) \neq 0$ gilt $\lambda = \mu = 1$. Die Taylorreihe beginnt mit
$$f(t) = 1 - \nu t + O(t^2),$$
also
$$Q(s) = \frac{1}{s} - \frac{\nu}{s^2} + O(s^{-3}), \quad s \to \infty,$$
in jedem Sektor der Form $-\frac{\pi}{2} + \delta \le \operatorname{ph}(s) \le \frac{\pi}{2} + \delta$.

7 Die Laplace-Methode

7.1 Satz (Banachscher Fixpunktsatz, Satz 15.6 der Analysis II im SS 16). *Sei* X *ein vollständiger metrischer Raum, seien* $x_0 \in X$ *und* $R > 0$. *Sei* $G\colon \overline{B}_R(x_0) \to X$ *eine Abbildung. Es gebe ein* $q < 1$, *so dass*

(a) $d(G(x), G(y)) \le q d(x, y)$ *für alle* $x, y \in \overline{B}_R(x_0)$,

(b) $d(G(x_0), x_0) \le R(1 - q)$.

Dann gibt es genau ein $x \in \overline{B}_R(x_0)$ *mit* $G(x) = x$.

Der Beweis zeigt, dass $d(x_m, x) \le \frac{q^m d(x_0, x_1)}{1-q}$.

Im folgenden fixieren wir $-\pi \le \gamma_1 < \gamma_2 \le \pi$ und setzen

$$S_\delta(R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R,\ \gamma_1 + \delta < \mathrm{ph}(z) < \gamma_2 - \delta\}$$

für $R, \delta \ge 0$. Zu jedem δ existiert B_δ, so dass zu je zwei Punkten $z_1, z_2 \in S_\delta(R)$ ein Weg in S_δ von z_1 nach z_2 existiert, der nicht länger als $B_\delta|z_1 - z_2|$ ist. Dieses B_δ kann unabhängig von R gewählt werden.

7.2 Satz. *Die Funktion* f *sei holomorph in* $S_0(R)$ *und besitze in jedem abgeschlossenen Teilsektor von* S_0 *eine asymptotische Entwicklung der Form*

$$f(z) \sim z + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{z^j}, \quad z \to \infty.$$

Dann existieren zu jedem $\delta > 0$ *Konstanten* $R_{1,\delta}, R_{2,\delta} > 0$, *so dass* f *in* $S_\delta(R_{1,\delta})$ *injektiv ist und* $S_{2\delta}(R_{2,\delta}) \subseteq f(S_\delta(R_{1,\delta}))$. *Insbesondere existiert eine Funktion* $g\colon S_{2\delta}(R_{2,\delta}) \to S_\delta(R_{1,\delta})$ *mit* $f \circ g = \mathrm{Id}$. *Es gilt* $g(w) = w + O(1)$, $|w| \to \infty$.

Beweis. Wir setzen $h(z) = w + (z - f(z))$. Dann gilt $f(z) = w$ genau dann, wenn z ein Fixpunkt von h ist. Die asymptotische Entwicklung kann gliedweise differenziert werden, also $h'(z) = 1 - f'(z) = O(z^{-2})$. Es gibt also C_δ, so dass $|h'(z| \le C_\delta |z|^{-2}$, falls $|z| > C_\delta$. Zu gegebenem δ wähle $R_{1,\delta} = 2C_\delta B_\delta$. Um zu zeigen, dass f in $S_\delta(R_{1,\delta})$ injektiv ist, seien $z_1, z_2 \in S_\delta(R_{1,\delta})$ gegeben. Dann gilt für einen geeigneten Weg γ von z_1 nach z_2 in $S_\delta(R_{1,\delta})$

$$|h(z_1) - h(z_2)| = \left| \int_\gamma h'(\zeta) d\zeta \right| \le B_\delta |z_1 - z_2| \frac{C_\delta}{R_{1,\delta}} \le \frac{1}{2}|z_1 - z_2|. \tag{7.1}$$

Also
$$|f(z_1) - f(z_2)| \geq |z_1 - z_2| - |h(z_1) - h(z_2)| \geq \frac{1}{2}|z_1 - z_2|.$$
Das zeigt die Injektivität.

Es gibt $A > 0$, so dass $|f(z) - z| \leq A$ für alle $z \in S_{2\delta}(S)$. Sei nun $R_{2,\delta}$ groß genug. und sei $w \in S_{2\delta}(R_2)$ beliebig. Abschätzung (7.1) zeigt, dass h kontrahierend mit Kontraktionskonstante $q = \frac{1}{2}$ ist. Wenn wir $z_0 = w$ setzen, dann
$$|h(z_0) - z_0| = |z - f(z)| \leq A.$$
Setzen wir $R = 2A$, dann ist auch 7.1 gezeigt. Die Konstante $R_{2,\delta}$ muss so groß gewählt werden, $\overline{B}_R(w) \subset S_\delta(R_{1,\delta})$ für alle $w \in S_{2\delta}(R_{2,\delta})$. □

7.3 Satz. *Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes besitzt* g *in jedem* S_δ *eine asymptotische Entwicklung*
$$g(w) = w + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{w^j}, \quad w \to \infty$$

Beweis. Wie im letzten Beweis gilt $|h'(z)| \leq C_\delta |z|^{-2}$ falls $|z| > C_\delta$. Für $h(z) = w + z - f(z)$ können wir in $B_{2A}(w)$ also auch eine Kontraktionskonstante der Form
$$q = \frac{K_\delta}{|w|^2}$$
bekommen. Für hinreichend großes z gilt wieder $q \leq \frac{1}{2}$. Wir setzen rekursiv $h_0(w) = w$ und $h_{j+1}(w) = h(h_j(w))$. Dann $\lim_{j\to\infty} h_j(w) = g(w)$ und
$$\begin{aligned}|h_{j+1}(w) - h_j(w)| = |h(h_j(w)) - h(h_{j-1}(w))| &\leq \frac{K_\delta}{|w|^2}|h_j(w) - h_{j-1}(w)| \\ &\leq \cdots \leq \frac{K_\delta^{j-1}}{|w|^{2(j-1)}}|h_1(w) - h_0(w)|.\end{aligned}$$
Jedes h_j hat seine eigene Entwicklung. Wegen der letzten Abschätzung stimmen diese in der ersten $2(j-1)$ Termen überein. Die Differenz zu g bestimmen wir als Potenz von q. □

7.4 Bemerkung. Indem man die ersten Terme der h_j sukzessive ausrechnet, sieht man, dass
$$b_0 = -a_0, \quad b_1 = -a_1, \quad b_2 = -a_2 - a_0 a_1, \quad \cdots$$
Vorrechnen!

7.5 Beispiel. Sei $f(t) = t - \ln(1+t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{5}t^5 + O(t^5)$, $t \to 0$. Analoge Überlegungen zum obigen Satz führen zur Existenz einer Funktion g mit $f(g(t)) = t$, $-\pi < \mathrm{ph}(t) < \pi$, mit asymptotischer Entwicklung
$$g(t) = b_1\sqrt{t} + b_2 t + b_3 t^{3/2} + b_4 t^2 + b_5 t^{5/2} + O(t^3).$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
f(g(t)) = \frac{1}{2}b_1^2 t + b_1 b_2 t^{3/2} + \frac{1}{2}b_2 t^2 + b_1 b_3 t^2 + b_2 b_3 t^{5/2} + b_1 b_4 t^{5/2} \\
- \frac{1}{3}b_1^3 t^{3/2} - b_1^2 b_2 t^2 - b_1 b_2^2 t^{5/2} - b_1^2 b_3 t^{5/2} + \frac{1}{4}b_1^4 t^2 + b_1^3 b_2 t^{5/2} - \frac{1}{5}b_1^5 t^{5/2} + O(t^3).
\end{aligned}
$$

Weiter geht's mit Koeffizientenvergleich

$$
\begin{aligned}
t: \qquad & 1 = \frac{1}{2}b_1^2, \\
t^{3/2}: \qquad & 0 = b_1 b_2 - \frac{1}{3}b_1^3, \\
t^2: \qquad & 0 = \frac{1}{2}b_2^2 + b_1 b_3 - b_1^2 b_2 + \frac{1}{4}b_1^4, \\
t^{5/2}: \qquad & 0 = b_2 b_3 + b_1 b_4 - b_1 b_2^2 - b_1^2 b_3 + b_1^3 b_2 - \frac{1}{5}b_1^5.
\end{aligned}
$$

Wir sehen $b_1 = \sqrt{2}$, $b_2 = \frac{2}{3}$, $b_3 = \frac{\sqrt{2}}{18}$, $b_4 = -\frac{2}{135}$. (b_4 habe ich mit sympy bestimmt.)

7.6 Theorem. *Sei* $a \in \mathbb{R}$, *sei* $R \in]0, \infty]$, *seien* $\gamma_- < 0 < \gamma_+$. *Für* $\delta > 0$ *sei* $S_\delta(R) = \{a + re^{i\varphi} \mid 0 < r < R, \gamma_- < \varphi < \gamma_+\}$. *Die Funktionen* p *und* q *seien holomorph in* $S_0(R)$ *mit den folgenden Eigenschaften*

(a) $p(t) \in \mathbb{R}$ *für* $t \in]a, a+R[$,

(b) $p(t) \sim p(a) + \sum_{j=0}^{\infty} p_j (t-a)^{j+\mu}$, $t \to 0$, *in jedem abgeschlossenen Teilsektor von* $S_0(R)$, *wobei* $\mu > 0$.

(c) $p_0 > 0$.

Analog zu Satz 7.2 existieren $R_1, \delta > 0$, *so dass* p *in* $S_\delta(R_1)$ *injektiv ist. Die Inverse* τ *von* $p(t) - p(a)$ *besitzt dann eine asymptotische Entwicklung*

$$\tau(v) \sim a + \sum_{j=1}^{\infty} c_j v^{j/\mu}, \quad v \to 0.$$

Wegen $p_0 > 0$ *kann man* R_1 *so wählen, dass* p *auf* $]a, a+R_1[$ *streng monoton wächst. Wir verlangen außerdem, dass*

(d) $p(t) \geq p(a + R_1)$ *für* $a + R_1 \leq t < a + R$.

Die asymptotische Entwicklung von q *habe die Form*

$$q(t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} q_j (t-a)^{j+\lambda-1}.$$

Setzen wir $f(v) = \frac{q(\tau(v))}{p'(\tau(v))}$, *so besitzt* f *eine asymptotische Entwicklung der Form*

$$f(v) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j v^{(j+\lambda-\mu)/\mu}, \quad v \searrow 0.$$

Mit diesen Koeffizienten gilt dann für jedes $b \in\,]a, a+R[$

$$\int_a^b e^{-xp(t)} q(t)\,dt \sim e^{-xp(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{j+\lambda}{\mu}\right) \frac{a_j}{x^{(\lambda+j)/\mu}}, \quad x \to \infty. \tag{7.2}$$

Beweis. Falls $b \geq a + R_1$, so gilt

$$\left| \int_{a+R_1}^b e^{-xp(t)} q(t)\,dt \right| \leq \sup_{R_1 \leq t \leq b} |q(t)|(b-a-R_1)e^{-xP(a+R_1)}.$$

Da p auf $]a, a+R_1[$ streng monoton fällt, spielt dieser Term in der asymptotischen Entwicklung keine Rolle. Wir nehmen daher $b \leq a + R_1$ an. Wir substituieren $v = p(t) - p(a)$. Dann

$$\int_a^b e^{-xp(t)} q(t)\,dt = \int_0^{p(b)-p(a)} e^{-x(v+p(a))} \frac{q(\tau(v))}{p'(\tau(v))} dv = e^{-xp(a)} \int_0^{p(b)-p(a)} e^{-xv} f(v)\,dv.$$

Das verarbeiten wir mit Watson's Lemma. Die prinzipielle Gestalt der Entwicklung von $f(v)$ kennen wir zumindest für $\mu = 1$ aus Satz 7.2. Wir müssen zeigen, dass $|f(v)| \leq C(|v|^{1-\delta} + e^{s_0|v|})$ für geeignete $\delta, C, s_0 > 0$. Wir zeigen das zuerst für kleine v. Es gilt

$$\frac{q(t)}{p'(t)} \sim \frac{q_0(t-a)^{\lambda-1}}{p_0\mu(t-a)^{\mu-1}} = \frac{q_0}{p_0\mu}(t-a)^{\lambda-\mu}, \quad t \searrow 0$$

und damit

$$f(v) \sim \frac{q_0}{p_0\mu} c_1^{\lambda-\mu} v^{(\lambda-\mu)/\mu}, \quad v \searrow 0. \tag{7.3}$$

Die andere Abschätzung erhalten wir aus der Beschränktheit von f. □

7.7 Bemerkung. Wenn $R = \infty$, so kann man häufig direkt zeigen, dass

$$\int_{a+R_1}^{\infty} e^{-xp(t)} |q(t)|\,dt = O(e^{-xA})$$

für ein $A > p(a)$. In diesem Fall gilt die Entwicklung 7.2 auch für $b = \infty$.

7.8 Bemerkung. Bei der Entwicklung von τ gelten

$$c_1 = \frac{1}{p_0^{1/\mu}}, \quad c_2 = -\frac{p_1}{\mu p_0^{1+2/\mu}}, \quad c_3 = \frac{(\mu+3)p_1^2 - 2\mu p_0 p_2}{2\mu^2 p_0^{2+3/\mu}}.$$

Beweis. Analog zu Bemerkung 7.4. □

7.9 Korollar. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 7.6 gilt*

$$\int_a^b e^{-xp(t)} q(t)\,dt \sim \frac{q_0}{\mu}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{e^{-xp(a)}}{(p_0 x)^{\lambda/\mu}}, \qquad x \to \infty.$$

Beweis. Nach Watson gilt

$$\int_a^\infty e^{-xp(t)} q(t)\,dt \sim a_0 e^{-xp(a)}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) x^{-\lambda/\mu}.$$

Den Koeffizienten a_0 hatten wir in (7.3) schon ausgerechnet. Es gilt

$$f(\nu) \sim \frac{q_0}{\mu p_0} c_1^{\lambda-\mu} \nu^{(\lambda-\mu)/\mu} = \frac{q_0}{p_0^{1+(\lambda-\mu)/\mu}\mu}\nu^{(\lambda-\mu)/\mu}, \qquad c \to \infty. \qquad \square$$

Das Korollar steht im Buch von Olver als Theorem 3.7.1 in der folgenden, stärkeren Form:

7.10 Theorem. *Es seien* p *eine reellwertige und* q *eine komplexwertige Funktion auf* $[a, b[$*, wobei* a *endlich ist, aber* b *auch gleich* ∞ *sein kann. Wir setzen außerdem voraus*

(a) $p(t) > p(a)$ *für alle* $t \in\,]a, b[$*, und für jedes* $c \in\,]a, b[$ *sei* $\inf_{t \geq c} p(t) - p(a) > 0$.

(b) p' *und* q *sind in einer Umgebung von* a *stetig.*

(c) $p(t) - p(a) \sim P\,(t-a)^\mu$, $q(t) \sim Q\,(t-a)^{\lambda-1}$, $p'(t) \sim \mu P\,(t-a)^{\mu-1}$ *für* $t \searrow 0$*, wobei* $P, \mu, \lambda > 0$ *und* $Q \neq 0$.

Dann gilt

$$\int_a^b e^{-xp(t)} q(t)\,dt \sim \frac{q_0}{\mu}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{e^{-xp(a)}}{(p_0 x)^{\lambda/\mu}}, \qquad x \to \infty.$$

falls das Integral für alle genügend großen Werte von x *absolut konvergiert.*

7.11 Beispiel. Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und sei $p\colon]a, b[\, \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2. Ferner besitze p ein striktes globales Minimum in $c \in\,]a, b[$. Genauer sei p auf $]a, c[$ streng monoton fallend, auf $]c, b[$ streng monoton wachsend, und es gelte $p''(c) > 0$. Schließlich sei $q\colon]a, b[\, \to \mathbb{C}$ stetig mit $q(t) = Q\,(t-c)^{\lambda-1}$, $t \to c$, für ein ungerades $\lambda \in \mathbb{N}$ und $Q \neq 0$. Dann gilt

$$\int_a^b e^{-xp(t)} q(t)\,dt \sim Q\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right) e^{-xp(c)} \left(\frac{p''(c)}{2} x\right)^{-\lambda/2}, \qquad x \to \infty,$$

falls das Integral für hinreichend große x absolut konvergiert.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $c = 0$.

$$\int_a^b e^{-xp(t)}q(t)dt = \int_0^{-a} e^{-xp(-t)}q(-t)dt + \int_0^b e^{-xp(t)}q(t)dt.$$

In beiden Fällen habe ich $\mu = 1$ und $P = \frac{p''(0}{2}$ und Q wie in der Voraussetzung. □

7.12 Beispiel. Wir entwickeln die Gammafunktion. Mit partieller Integration

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-w}\frac{w^x}{x}dw.$$

Wir substituieren $w = x(1+t)$. Dann

$$\Gamma(x) = x^x e^{-x}\int_{-1}^\infty e^{-x(t-\log(1+t))}dt.$$

Dieses Integral kann mit der Laplace-Methode bestimmt werden. Dabei ist $p(t) = t - \log(1+t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 \pm \cdots$. Kurvendiskussion zeigt, dass p bei $t = 0$ ein globales Maximum besitzt. Für $t > 0$ hatte ich die Entwicklung von τ in einem Beispiel vorgerechnet

$$\tau(\nu) = \sqrt{2}\sqrt{\nu} + \frac{2}{3}\nu + \frac{\sqrt{2}}{18}\nu^{3/2} - \frac{2}{135}\nu^2 + O\left(\nu^{-5/2}\right).$$

Wegen $q \equiv 1$ haben wir Glück

$$\begin{aligned} f(\nu) = \frac{1}{p'(\tau(\nu))} = \frac{1}{p'(p^{-1}(\nu))} = (p^{-1})'(\nu) = \tau'(\nu) \\ = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\nu}} + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\nu} - \frac{4}{135}\nu + O(\nu^{3/2}). \end{aligned}$$

Wir haben $\mu = 2$ und $\lambda = 1$. Wir trennen das Integral wieder an $c = 0$. Dann

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-xp(t)}dt \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)x^{-1/2} + \frac{2}{3}\Gamma(1)x^{-1} \\ + \frac{\sqrt{2}}{12}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)x^{-3/2} - \frac{4}{135}x^{-2} + O(x^{-5/2}), \quad x \to \infty. \end{aligned}$$

Bei dem anderen Integral ist

$$\tau(\nu) = \sqrt{2}\sqrt{\nu} - \frac{2}{3}\nu + \frac{\sqrt{2}}{18}\nu^{3/2} + \frac{2}{135}\nu^2 + O\left(\nu^{-5/2}\right).$$

Also heben sich die Terme mit ganzzahligen Exponenten weg. Wir beachten $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Insgesamt erhalten wir

$$\Gamma(x) = x^x e^{-x}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\left(1 + \frac{1}{12x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Wir könnten mit vertretbarem Aufwand weitere Terme bestimmen.

8 Komplexe Wegintegrale

Allgemeine Voraussetzungen für diesen Abschnitt:

8.1 Voraussetzung. (i) Sei $G \subseteq$ ein Gebiet und es sei $\gamma\colon [\alpha, \beta[\to \mathbb{C}$ ein C^1-Weg mit $\gamma(]\alpha, \beta[) \subset G$, wobei β auch ∞ sein darf. Wir setzen $a = \gamma(\alpha)$ und $b = \gamma(\beta)$. Ferner sei

$$\omega = \lim_{\sigma \searrow \alpha} \mathrm{ph}(\gamma(\sigma) - a).$$

(ii) Es seien p und q zwei in G holomorphe Funktionen, für welche es eine Umgebung U von a gibt, so dass sie in $U \cap G$ in konvergente Reihen der Form

$$p(t) = p(a) + \sum_{j=0}^{\infty} p_j (t-a)^{j+\mu} \quad \text{und} \quad q(t) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j (t-a)^{j+\lambda-1}$$

entwickelt werden können, wobei $p_0 \neq 0$, $\mu > 0$ und $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

(iii) Im Fall $a \in \partial G$ können λ und μ gebrochen sein. Dann sind die Potenzen nicht notwendig über den Hauptzweig des Logarithmus erklärt, sondern

$$(t-a)^{\mu} = \exp\bigl(\mu \log\bigl((t-a)e^{-i\omega}\bigr) + i\omega\mu\bigr),$$

wobei der Logarithmus der Hauptzweig ist. Dito für λ.

8.2 Beispiel. (a) Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $\sigma \mapsto -\sigma$. Dann $\omega = \pi$ und

$$\sqrt{\gamma(\sigma)} = \sqrt{\gamma(\sigma)e^{-i\pi}}e^{i\pi/2} = i\sqrt{-\gamma(\sigma)}.$$

(b) Was hier passiert, ist folgendes: Sei $(t-a) = re^{i(\omega+\psi)}$ mit $-\pi < \psi < \pi$. Dann

$$(t-a)^{\mu} = \exp\bigl(\mu \log\bigl((t-a)e^{-i\omega}\bigr) + i\omega\mu\bigr)$$
$$= \exp(\mu(\log r + i\psi) + i\omega\mu) = r^{\mu}e^{i\mu(\omega+\psi)}.$$

8.3 Voraussetzung. Weitere Voraussetzungen:

(iv) Es sei $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq R,\ \gamma_- \leq \mathrm{ph}(z) \leq \gamma_+\}$ ein Sektor mit $\gamma_+ - \gamma_- < \pi$.

(v) Für $z \in S$ setzen wir

$$I(z) = \int_{\gamma} e^{-zp(t)} q(t)\,dt.$$

Im allgemeinen ist das Wegintegral an beiden Enden uneigentlich. Wir verlangen, dass $I(Re^{i\theta})$ in b absolut und gleichmäßig in $\theta \in [\gamma_-, \gamma_+]$ konvergiert.

(vi) Für alle $t \in \gamma(]\alpha, \beta[)$ und alle $\theta \in [\gamma_-, \gamma_+]$ gilt $\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}p(t) - e^{i\theta}p(a)\right) > 0$.

(vii) Es gibt $\epsilon > 0$, so dass $\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}p(t) - e^{i\theta}p(a)\right) \geq \epsilon$ für alle $\sigma \geq \alpha + \epsilon$ und alle $\theta \in [\gamma_-, \gamma_+]$ gilt.

(viii) Beachte

$$e^{i\theta}p(t) - e^{i\theta}p(a) \sim e^{i\theta}p_0(t-a)^\mu \sim e^{i\theta}p_0 e^{i\mu\omega}|t-a|^\mu.$$

Diese Größe hat füe alle $\theta \in [\gamma_-, \gamma_+]$ einen positiven Realteil. Daher existiert für jedes solche θ ein ω_0 mit $|p_0|e^{i\omega_0} = p_0$, so dass

$$|\theta + \omega_0 + \mu\omega| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dieses ω_0 ist eindeutig und hängt stetig von θ ab, ist also konstant. Potenzen von p_0 werden mit diesem ω_0 konstruiert, also $p_0^{1/\mu} = |p_0|^{1/\mu}e^{i\omega_0/\mu}$.

(ix) Wir setzen $v(t) = p(t) - p(a)$ für $t \in \operatorname{Bild}(\gamma)$. Wegen der Voraussetzung (vii) gilt $v(t) \neq 0$ falls $t \in \operatorname{Bild}(\gamma) \setminus \{a\}$. Es gibt also entlang γ eine μ-te Wurzel w von v. Wir wählen sie so, dass $w(t) \sim p_0^{1/\mu}(t-a)$ für $t \to a$ entlang γ. Durch stetige Fortsetzung wird w auf $\operatorname{Bild}(\gamma)$ als μ-te Wurzel aus v erklärt.

(x) Wir können nun wieder $t-a$ nach v entwickeln, wobei wir bei der Bestimmung des Zweigs der Wurzel den vorigen Punkt berücksichtigen, also

$$t - a = \sum_{j=1}^{\infty} c_j w^j = \sum_{j=1}^{\infty} c_j v^{j/\mu} =: \tau(v) - a$$

mit denselben c_j wie in Theorem 7.6. Dies führt schließlich zur Entwicklung

$$f(v) = \frac{q(\tau(v))}{p'(\tau(v))} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j v^{(j+\lambda-\mu)/\mu}$$

mit denselben a_j wie in Theorem 7.6.

8.4 Theorem (Olver, Theorem 4.6.1). *Mit allen diesen Voraussetzungen gilt*

$$\int_\gamma e^{-zp(t)}q(t)dt \sim e^{-zp(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{j+\lambda}{\mu}\right) \frac{a_j}{z^{(j+\lambda)/\mu}}, \quad z \to \infty \textit{ in } S.$$

Hierbei werden die Potenzen von z mittels des Hauptzweigs bestimmt.

8.5 Beispiel. Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $\sigma \mapsto \sigma\pi(1+i)$. Bestimme die ersten drei Terme der Entwicklung von

$$\int_\gamma (1+t)^{ix} \exp\left(ixe^t\right) dt,$$

wobei die Potenz mittels des Hauptzweigs bestimmt wird.

Wir haben $a = 0$ und $\omega = \frac{\pi}{4}$. Wir haben

$$p(t) = -i(e^t + \log(1+t)) = -i\left(1 + 2t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} + \cdots\right).$$

Also $\mu = 1$ und $p_0 = -i$ sowie $Q \equiv 1$ und $\lambda = 0$.

Als Sektor nehmen wir einen um die positive reelle Achse und betrachten ab jetzt nur $\theta = 0$.

$$\operatorname{Re}(p(t) - p(0)) = \operatorname{Im} e^{\pi\sigma(1+i)} + \arctan\frac{\pi\sigma}{1+\pi\sigma} = e^{\pi\sigma}\sin(\pi\sigma) + \arctan\frac{\pi\sigma}{1+\pi\sigma}.$$

Diese Funktion hat in dem Kompaktum $[0,1]$ keine Nullstelle. Wie in Beispiel 7.12 haben wir wieder $\nu = P(t)$ für $P(t) = p(t) - p(a)$ und daher $f(\nu) = \frac{1}{P'(\tau(\nu))} = \tau'(\nu)$. Die ersten Terme der Entwicklung von τ nehmen wir aus Bemerkung 7.8. Wir haben $p_0 = -2i$, $p_1 = 0$ und $p_2 = -\frac{i}{2}$, also

$$c_1 = \frac{1}{p_0^{1/\mu}} = \frac{i}{2}, \quad c_2 = -\frac{p_1}{\mu p_0^{1+2/\mu}} = 0, \quad c_3 = \frac{(\mu+3)p_1^2 - 2\mu p_0 p_2}{2\mu^2 p_0^{2+3/\mu}} = -\frac{p_2}{p_0^4} = \frac{i}{32}.$$

Daher $\tau'(\nu) = \frac{i}{2} + \frac{3i}{32}\nu^2 + \cdots$ und schließlich

$$\int_\gamma (1+t)^{ix}\exp(ixe^t) = e^{ix}\left(\frac{i}{2x} + \frac{3i}{16x^3} + O(x^{-4})\right), \quad x \to \infty.$$

8.6 Bemerkung. Wir untersuchen, was passiert, wenn die Funktion $\sigma \mapsto \operatorname{Re}(p(\gamma(\sigma)))$ in einem Punkt in $]\alpha,\beta[$ ein striktes lokales Minimum besitzt und γ dort differenzierbar und p und q dort holomorph sind. Dann würde man das Integral gerne teilen in $\int_c^a + \int_a^b$. Wenn man beim ersten obere und untere Grenze vertauscht, dann kann man (Gültigkeit der anderen Voraussetzungen vorausgesetzt) das Theorem auf beide Teilstücke anwenden.

Wir haben ohne Einschränkung $a = 0$ und machen die Substitution $t \mapsto -t$. Diese Vereinfachung kann mit dem Cauchyschen Intergralsatz gerechtfertigt werden. Die substituierten Größen kennzeichnen wir allesamt mit einer Tilde. Also $\widetilde{\gamma} = -\gamma$, $\widetilde{\omega} = \omega + \pi$, $\widetilde{p}(t) = p(-t)$ und $\widetilde{q}(t) = q(-t)$. Als Sektor wählen wir einen, der $[R,\infty[$ enthält und argumentieren mit $\theta = 0$.

Im folgenden sei erstmal $\mu = 1$. In diesem Fall $\operatorname{Re}(p_0\gamma'(\alpha)) = 0$, also $\widetilde{\omega}_0 = \omega_0 = \operatorname{Im}\log p_0$, wobei hier der Hauptteil gemeint ist, es kommen aber gar keine gebrochenen Exponenten vor.

Wir haben $p(\tau(\nu)) = \nu$ und $\tau(p(t)) = t$ und verlangen $\widetilde{\tau}(\widetilde{p}(t)) = t$ und $\widetilde{p}(\widetilde{\tau}(\nu)) = \nu$, also $\widetilde{\tau} = -\tau$ und daher

$$\widetilde{f}(\nu) = \frac{\widetilde{q}(\widetilde{\tau}(\nu))}{\widetilde{p}'(\widetilde{\tau}(\nu))} = -f(\nu),$$

Das ist der einzige Unterschied der beiden Entwicklungen. Also heben sie sich gegenseitig auf.

Im Fall $p'(\gamma(\sigma) = 0$ haben wir mindestens $\mu = 2$ und daher für die beiden Teile des Integrals verschiedene Werte von Ω_0. Die beiden μ-ten Wurzelns aus p_0 sind daher verschieden.

9 Asymptotische Entwicklung der Hankelfunktionen

Wir hatten die Sommerfeld-Pfade definiert durch $S_\pm(t) = \pm t + i\left(\pm\frac{\pi}{2} + \arctan t\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Für $\nu \in \mathbb{C}$ und $\operatorname{Re} z > 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= \frac{1}{\pi i} \int_{S_+} e^{z \sinh \tau - \nu\tau} d\tau, \\ H_\nu^{(2)}(z) &= \frac{1}{\pi i} \int_{S_-} e^{z \sinh \tau - \nu\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Wir behandeln das erste der beiden Integrale. Dann $p(\tau) = -\sinh(\tau)$ und $q(\tau) = e^{-\nu\tau}$. Wegen $p'(\tau) = -\cosh(\tau)$ liegen die Sättel bei $i(\frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Es liegt also tatsächlich ein Sattel auf dem Weg. Da wir für die asymptotische Entwicklung den maximalen Sektor haben wollen, müssen wir den optimalen Weg finden oder jedenfalls nahe dran kommen.

Es gilt $p(i\frac{\pi}{2}) = -i$. Optimalerweise ist also $\operatorname{Im} \sinh(\gamma(x)) = 1$ für alle x. Wir setzen an $\gamma(x) = i\frac{\pi}{2} + x + ix(1 + b(x))$ mit $b(0) = 0$.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} e^x \sin\left(\frac{\pi}{2} + x(1+b)\right) + \frac{1}{2} e^{-x} \sin\left(\frac{\pi}{2} + x(1+b)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x(1+b)\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \cos\left(x(1+b)\right). \end{aligned}$$

Das kann man konkret lösen

$$b(x) = \frac{1}{x} \arccos \frac{2}{e^x + e^{-x}} - 1.$$

9.1 Lemma. *Diese Funktion* $b\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ *lässt sich differenzierbar nach* 0 *fortsetzen. Für die Fortsetzung gilt* $b(0) = 0$.

Beweis. Die Gleichung für b lautet als Potenzreihe

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^\infty (-1)^\ell \frac{x^{2\ell}(1+b)^{2\ell}}{(2\ell)!}\right) \\ &= \sum_{m=0}^\infty \sum_{\ell=0}^m \frac{1}{(2m-2\ell)!(2\ell)!} (-1)^\ell (1+b)^{2\ell} x^{2m}. \end{aligned}$$

Nun können wir das nullte Glied abziehen und durch x^2 teilen.

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{m}\frac{1}{(2m-2\ell)!(2\ell)!}(-1)^{\ell}(1+b)^{2\ell}x^{2m-2}=0.$$

Wir schreiben das als $F(x,b)=0$. Man überlegt sich, dass $\frac{\partial F}{\partial b}(0,0)=-1$. Also liefert des Satz über implizite Funktionen die Existenz einer differenzierbaren Lösung. Die Lösung haben wir aber vorhin schon konkret ausgerechnet. □

Nun gilt

$$\begin{aligned}-\operatorname{Re}\sinh\Big(i\frac{\pi}{2}+x+ix(1+b)\Big)&=\frac{1}{2}e^x\cos\Big(\frac{\pi}{2}+x(1+b)\Big)-\frac{\pi}{2}\cos\Big(\frac{\pi}{2}+x(1+b)\Big)\\&=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\sin(x(1+b)).\end{aligned}$$

Setzt man $b=b(x)$, so ist diese Größe wachsend, solange $|x(1+b)|\le\frac{\pi}{2}$. Das ist aber durch die Gleichung für b gesichert. Man muss sich noch $b(-x)=b(x)$ überlegen. Für $\theta\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ gilt wegen der Wahl von γ

$$-\operatorname{Re}e^{i\theta}(\sinh(\gamma(t))-i)=-\sinh(\gamma(t))\cos\theta.$$

Daher sind die Monotonieforderungen erfüllt.

Weitere Setzungen sind $t_0=i\frac{\pi}{2}$, $\tau=t-t_0$ und $\nu=p(t)-p(t_0)=-\sinh(\tau+i\frac{\pi}{2})+\sinh(i\frac{\pi}{2})$. Beachte $\sinh(i\frac{\pi}{2})=i$. Wegen $\sinh t=-i\sin(it)$ und wegen des Additionstheorems

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

erhalten wir

$$\nu=i\sin(i\tau-\frac{\pi}{2})-i\sin(-\frac{\pi}{2})=-i(\cos(i\tau)-\cos 0)=2i\sin^2\frac{i\tau}{2}=-2i\sinh^2\frac{\tau}{2}.$$

Wir berechnen den Teil des Integrals von $i\frac{\pi}{2}$ bis ∞. Dann $\omega=\frac{\pi}{4}$ und $p_0=-\frac{1}{2}\sinh''(t_0)=-\frac{1}{2}\sinh(t_0)=-\frac{i}{2}$. Wir müssen ω_0 mit $p_0=|p_0|e^{i\omega_0}$ so bestimmen, dass $|\omega_0+2\omega|\le\frac{\pi}{2}$. Das bedeutet $\omega_0=-\frac{\pi}{2}$ und daher $\sqrt{p_0}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/4}=\frac{1-i}{2}$ und $\sqrt{\nu}=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\sinh\frac{\tau}{2}$. Ferner

$$f(\nu)=\frac{q(t)}{p'(t)}=-\frac{e^{-\nu t}}{\cosh(t)}.$$

Es gilt $\cos(it)=\cosh t$ und daher $\cosh t=\cos(it)=\cos(-\frac{\pi}{2}+i\tau)=\sin(i\tau)=2\sin\frac{i\tau}{2}\cos\frac{i\tau}{2}=2i\sinh\frac{\tau}{2}\cosh\frac{\tau}{2}$.

Nun bestimmen wir die a_j aus

$$-\frac{e^{-\nu t}}{\cosh(t)}=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\nu^{(j-1)/2}.$$

Wir ersetzen $\sqrt{\nu}$ wie oben bestimmt und multiplizieren beide Seiten mit $e^{-i\pi/4}\sqrt{2}\sinh\frac{\tau}{2}$.

$$
\begin{aligned}
-\frac{e^{-\nu t}}{2i\sinh\frac{\tau}{2}\cosh\frac{\tau}{2}} &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j 2^{(j-1)/2} e^{-i(j-1)\pi/4)} \sinh^{j-1}\frac{\tau}{2}, \\
\frac{e^{i\pi/4}e^{-\nu t}}{\sqrt{2}\cosh\frac{\tau}{2}} &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j 2^{j/2} e^{-ij\pi/4} \sinh^{j}\frac{\tau}{2}.
\end{aligned}
$$

Auf der linken Seite setzt man jetzt $t = \tau + i\frac{\pi}{2}$ und erhält dann

$$
\frac{e^{-(2\nu-1)i\pi/4}e^{-\nu\tau}}{\sqrt{2}\cosh\frac{\tau}{2}}.
$$

Die ungeraden Potenzen heben sich heraus, wenn man die beiden Anteile des Wegs zusammenfasst. Wir brauchen also nur die a_j mit geradem Index zu bestimmen. Dazu addieren wir die beiden Formeln mit $\pm\tau$

$$
\frac{e^{-(2\nu-1)i\pi/4}\cosh(\nu\tau)}{\sqrt{2}\cosh\frac{\tau}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j}(-2i)^j \sinh^{2j}\frac{\tau}{2}.
$$

Jetzt setzen wir $y = \sinh\frac{\tau}{2}$. Dann haben wir auf der rechten Seite eine Potenzreihe in y, deren Taylorkoeffizienten zu bestimmen sind. Frage: Wie schaffen wir es, die linke Seite nach y zu differenzieren?

10 Puiseux-Reihen

Dieses Kapitel orientiert sich an dem Buch *Ebene algebraische Kurven* von Gerd Fischer.

10.1 Definition. Eine *formale Potenzreihe* in zwei Variablen ist eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{k,\ell}X^kY^\ell$. Formale Potenzreihen werden gliedweise addiert und nach den Regeln des Cauchyprodukts multipliziert. Auf diese Weise entsteht ein Ring, den man mit $\mathbb{C}[[X,Y]]$ bezeichnet.

10.2 Bemerkung. (a) Es ist dann klar, was eine formale Potenzreihe in einer Unbestimmten ist. Man kann in formale Potenzreihen i. a. keine Werte einsetzen. Man kann formalen Potenzreihen in einer Unbestimmten aber eine *Nullstellenordnung* zuordnen. Wenn $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_kX^k$ eine formale Potenzreihe mit $a_0 = \cdots = a_{\mu-1} = 0$ und $a_\mu \neq 0$ ist, so schreibt man $\mathrm{ord}_0(f) = \mu$.

(b) Man kann in formale Potenzreihen für die Unbestimmten formale Potenzreihen in einer Unbestimmten einsetzen, vorausgesetzt, die eingesetzte Potenzreihe verschwindet mindestens von der Ordnung 1. Das sieht man mit einem Rekursionsargument.

(c) $f \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ heißt Y-*allgemein*, wenn $f(0,Y)$ nicht das Nullpolynom ist. Wenn dann k die Verschwindungsordnung von $f(0,Y)$ als Potenzreihe in Y ist, so sagt man, f sei Y-allgemein von der Ordnung k.

Wenn f nicht Y-allgemein ist, dann kann man einen Faktor X abdividieren.

10.3 Theorem. *Die formale Potenzreihe* $f \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ *sei* Y*-allgemein von der Ordnung* $k \geq 1$*. Dann gibt es* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\varphi \in \mathbb{C}[[T]]$*, so dass* $f(T^n, \varphi(T)) = 0$*.*

Man kann zeigen, dass φ konvergent ist, wenn f konvergent ist. Das im folgenden vorgestellte Verfahren findet nur einen Zweig der Lösung. Im Buch von Fischer wird auch dargestellt, wie man alle findet.

Wir werden in diesem Kapitel einen konstruktiven Beweis des Theorems geben.

10.4 Definition. (a) Der *Träger* einer formalen Potenzreihe $f = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{k,\ell}X^kY^\ell$ besteht aus allen (k,ℓ), für welche $a_{k,\ell}$ nicht verschwindedet.

(b) Das *Newton-Polygon* von f ist die konvexe Hülle von

$$\big\{(k,\ell) + [0,\infty[^2 \subset \mathbb{R}^2 \bigm| a_{k,\ell} \neq 0\big\}.$$

Wenn f nicht X-allgemein ist, dann $f(T,0) = 0$. Wir gehen im folgenden also von einem X-allgemeinen f aus. Dann berührt das Newton-Polygon sowohl die x- als auch die y-Achse.

10.5 Definition. Der Punkt $(0,k)$ ist eine Ecke des Newton-Polygons. In ihm treffen sich das unendliche Randstück $\{0\} \times [k, \infty[$ und ein endliches Stück, dessen Steigung wir mit $-\frac{q}{p}$ bezeichnen, wobei $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu wählen sind. Das Polynom

$$\widetilde{f} = \sum_{q\mu + p\nu = pk} a_{\mu,\nu} X^\mu Y^\nu$$

ist das *quasihomogene Initialpolynom* von f.

Für das quasihomogene Initialpolynom machen wir einen Ansatz

$$\widetilde{f}(T^q, \lambda T^p) = \sum_{q\mu + p\nu = pk} a_{\mu,\nu} T^{\mu q + \nu p} = \sum_{q\mu + p\nu = pk} a_{\mu,\nu} \lambda^\nu T^{pk} = g(\lambda) T^{pk}$$

für $g(\lambda) = \sum_{q\mu + p\nu = pk} a_{\mu,\nu}\lambda^\nu$. Dieses g ist ein Polynom vom Grad k. Es gilt $g(0) \neq 0$.

Wir fixieren nun eine Nullstelle λ_0 von g und betrachten die formale Potenzreihe $f(T^q, T^p(\lambda_0 + Y_1))$ in den Unbestimmten T und Y_1. Sie ist durch T^{pk} teilbar, es gibt also eine formale Potenzreihe f_1 mit $f(T^q, T^p(\lambda_0 + Y_1)) = T^{pk} f_1(T, Y_1)$. Es gilt $f_1(0, Y_1) = g(\lambda_0 + Y_1)$.

10.6 Lemma. *(a) f_1 ist Y_1-allgemein von der Ordnung k_1 mit $1 \leq k_1 \leq k$.*

(b) Wenn $k_1 = k$, dann $q = 1$.

Beweis. (a) k_1 ist die Verschwindungsordnung von g in λ_0.

(b) Wenn $k_1 = k$, dann ist g von der Form $g(\lambda) = c(\lambda - \lambda_0)^k$ für ein $c \neq 0$. Insbesondere besitzt g den Term $-c\lambda_0\lambda^{k-1}$. Vergleicht man das mit der Entwicklung von g in Termen der $a_{\mu,\nu}$, so sieht man, dass es ein μ gibt mit $q\mu + p(k-1) = pk$. Das impliziert $q\mu = p$, und da p und q als teilerfremd angenommen werden, folgt $q = 1$. □

Anstelle von $f(T^q, \varphi(T)) = 0$ schreiben wir $f(X, \varphi(X^{1/q})) = 0$. In diesem Fall gilt die Gleichheit für jeden Zweig der Wurzel.

Damit setzt sich das Verfahren wie fort zusammen:

Die Rekursion beginnt mit $f_0 = f$, $X_0 = X$, $Y_0 = Y$ und $k_0 = k$. Von i nach $i+1$ gelangt man wie folgt: Falls $Y_i^{k_i}$ ein Teiler von f_i ist, so dividiert man ihn ab; wir nehmen also o. E. an, dass $Y_i^{k_i}$ kein Teiler von f ist. Dann bestimmen wir wieder den quasihomogenen Anteil

$$\widetilde{f}_i(X_i, Y_i) = \sum_{q_i\mu + p_i\nu = p_i k_i} a^{(i)}_{\mu,\nu} X_i^\mu Y_i^\nu.$$

Dann gibt es wieder ein $\lambda_i \neq 0$, so dass $\widetilde{f}_i(X_i, \widetilde{Y}_i) = 0$ für $\widetilde{Y}_i = \lambda_i X_i^{p_i/q_i}$. Man macht also den Ansatz

$$X_i = X_{i+1}^{q_i}, \qquad Y_i = X_{i+1}^{p_i}(\lambda_i + Y_{i+y}).$$

Das geschieht möglicherweise unendlich oft. Wegen des Hilfssatzes fallen die k_i dabei; sie werden also ab einem gewissen i stationär. Wiederum wegen des Hilfssatzes sind also fast alle q_i gleich 1.

Verfolgt man die Substitutionen zurück, so gilt für das ursprüngliche X und alle hinreichend großen j die Gleichung $X = X_j^n$ für $n = q_0 \cdots q_N$, wobei N hinreichend groß, aber fest.

Bei den Y geschieht dagegen folgendes:

$$Y = Y_0 = \widetilde{Y}_0 + X_1^{p_0} Y_1 = \widetilde{Y}_0 + X_1^{p_0}(\widetilde{Y}_1 + X_2^{p_1} Y_2) = \cdots .$$

Jedenfalls ändern sich in jedem neuen Schritt die Terme in den niedrigeren Potenzen von X nicht mehr.

Damit ist das Theorem gezeigt. Im Fall, dass f holomorph ist, ist es möglich nachzuweisen, dass es eine Lösung der Form $f(X, \varphi(X^{1/n}))$ mit holomorphem φ gibt. Anschließend führt man den Nachweis, dass es sich dabei um eine der mit dem Verfahren von Newton gewonnenen Lösungen handelt.

10.7 Beispiel. Das cartesische Blatt

$$X^3 + Y^3 - 3XY = 0.$$

Das in $(0, 3)$ beginnende Randsegment hat die Steigung -2, das quasihomogene Initialpolynom ist $\widetilde{f} = Y^3 - 3XY$. Also bekommen wir den Ansatz $Y = \sqrt{3}X^{1/2}$. Das bedeutet

$$X = X_1^2, \quad Y = X_1(\sqrt{3} + Y_1).$$

Die neue Gleichung ist

$$0 = X_1^3(6Y_1 + \sqrt{3}Y_1^2 + Y_1^3 + X_1^3).$$

Das neue Initialpolynom ist $6Y_1 + X_1^3$. Der neue Ansatz also

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = X_2^3(-\frac{1}{6} + Y_2).$$

Wenn wir hier aufhören, haben wir

$$X = X_2^2, \quad Y = X_1(\sqrt{3} + Y_1) = X_2(\sqrt{3} + X_2^3(-\frac{1}{6} + \cdots)),$$

also $\varphi(X) = \sqrt{3}\sqrt{X} - \frac{1}{6}X^2 + \cdots$. Dann haben wir $f(X, \sqrt{3}\sqrt{X} - X^2/6) = O(X^6)$.

11 Die Lambertsche W-Funktion

Literatur: Corless, R. M., Gonnet, G. H., Hare, D. E. G., Jeffrey, D. J., and Knuth, D. E.: *On the Lambert W function.* Adv. Comp. Math. **5** (1996), 329–359.

11.1 Definition. Die Umkehrung der Funktion $f\colon]-1, \infty[\to]-\frac{1}{e}, \infty[$, $w \mapsto we^w$, ist die *Lambertsche W-Funktion.*

Wir wollen sie ins Komplexe ausdehnen. Für $w = x + iy$ gilt

$$f(w) = e^x(x \cos y - y \sin y) + ie^x(x \sin y + y \cos y).$$

Auf der Kurve $x = -y \cot y$ nimmt f reelle Werte an. Variiert y zwischen 0 und π, so variiert x zwischen -1 und ∞, variiert y zwischen 0 und $-\pi$, so variiert x ebenfalls zwischen -1 und ∞. Das Bild der Kurve ist $]-\infty, -\frac{1}{e}[$.

11.2 Lemma. *Es sei* $G = \{x + iy \in \mathbb{C} | -\pi < y < \pi, x > -y \cot y\}$. *Dann ist* $f\colon G \to \mathbb{C} \setminus]-\infty, -\frac{1}{e}[$ *bijektiv.*

Beweis. Die Vorüberlegung zeigt, dass $f(\partial G) =]-\infty, -\frac{1}{e}[$. Sei nun $u \in G$. Für hinreichend großes R sei γ_R der positiv orientierte Weg entlag des Randes von $\{z \in G \mid \operatorname{Re} z < R\}$. Wir zeigen für alle hinreichend großen R, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f'(w)}{f(w) - u} dw = 1.$$

Der Integrand hängt stetig von u ab, das Integral ist ganzzahlig, also ändert es sich nicht, wenn u durch 0 ersetzt wird. Da f nur eine Nullstelle hat, und zwar in 0, folgt die Behauptung aus

$$\operatorname{Res}_0 \frac{f'}{f} = \operatorname{Res}_0 \frac{w + 1}{w} = 1.$$

□

11.3 Lemma.

$$W'(z) = \frac{1}{(1 + W(z))e^{W(z)}} = \frac{W(z)}{(1 + W(z))z}, \quad \textit{falls } z \neq 0.$$

11.4 Lemma.

$$W(z) = \log z - \frac{\log \log z}{\log z} - \frac{\log \log z}{\log^2 z}, z \to \infty, |\mathrm{ph}(z)| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Beweis. Das hatten wir für reelles Argument als Aufgabe 16 auf Blatt 8 gezeigt. □