Funktionalanalysis I

Rüdiger W. Braun

Wintersemester 2014/15

Inhaltsverzeichnis

1 Mengentopologie

Überall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Null ist keine natürliche Zahl.

1.1 Definition. Eine *Topologie* auf einer Menge X ist ein System $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X mit den folgenden drei Eigenschaften

(a) $X \in \mathcal{O}$ und $\emptyset \in \mathcal{O}$.

(b) Die Vereinigung beliebig vieler Mengen in $\mathcal{O}$ ist wieder in $\mathcal{O}$.

(c) Der Durchschnitt endlich vieler Mengen in $\mathcal{O}$ ist wieder in $\mathcal{O}$.

Die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen *offene Mengen*.

1.2 Beispiel. (a) Die Potenzmenge von X ist eine Topologie auf X.

(b) $\{\emptyset, X\}$ ist eine Topologie auf X (genannt "der Klumpen").

(c) Wenn X mit einer Metrik versehen ist, dann haben wir schon eine Definition des Begriffs "offen" aus der Analysis II. Die in diesem Sinn offenen Mengen bilden eine Topologie.

1.3 Bemerkung. (a) Man sagt, eine Topologie $\mathcal{O}_1$ sei *schwächer* als eine andere Topologie $\mathcal{O}_2$, wenn $\mathcal{O}_1$ eine Teilmenge von $\mathcal{O}_2$ ist. In diesem Fall sagt man auch, dass $\mathcal{O}_2$ feiner als $\mathcal{O}_1$ ist.

(b) Der Durchschnitt über beliebig viele Topologien auf X ist wieder eine Topologie auf X.

1.4 Definition. Sei $a \in X$. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von a, wenn es eine offene Menge G mit $a \in G \subset U$ gibt.

Für eine beliebige Menge M ist a ein *innerer Punkt* von M, wenn M Umgebung von a ist. Das *Innere* von M besteht aus allen inneren Punkten von M. Man schreibt $\mathring{M}$ für das Innere von M.

1.5 Lemma. *M ist genau dann offen, wenn $M = \mathring{M}$.*

1.6 Definition. Ein topologischer Raum heißt *separiert* oder *Hausdorffsch*, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $a \neq b$ in X Umgebungen U_a von a und U_b von b gibt, so dass $U_a \cap U_b = \emptyset$.

1.7 Definition. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Der Abschluss $\overline{M}$ einer Menge M ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von M.

1.8 Definition. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *stetig* in $a \in X$, wenn es zu jeder Umgebung U von $f(a)$ eine Umgebung W von a mit $f(W) \subset U$ gibt.

1.9 Satz. $f\colon X \to Y$ *ist genau dann stetig, wenn für jede offene Menge* $G \subset Y$ *das Urbild* $f^{-1}(G)$ *offen ist.*

1.10 Bemerkung. (a) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* genau dann gegen a, wenn es zu jeder Umgebung U von a ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n \in U$ für alle $n \geq N$.

(b) Wenn f stetig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Folge ist, dann konvergiert $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(a)$.

(c) Es gibt aber topologische Räume X und Y und unstetige Abbildungen $f\colon X \to Y$, für die die Aussage (b) ebenfalls zutrifft.

1.11 Definition. Sei $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X und sei Y eine Teilmenge von X. Dann ist

$$\mathcal{O}_Y = \{G \cap Y \mid G \in \mathcal{O}\}$$

eine Topologie auf Y. Man bezeichnet sie als *Teilraumtopologie*.

1.12 Satz. *Sei* X *ein topologischer und* Y *ein hausdorffscher topologischer Raum, sei* $M \subset X$ *und seien* $f, g\colon \overline{M} \to Y$ *stetig. Wenn* $f(x) = g(x)$ *für alle* $x \in M$*, dann* $f = g$.

1.13 Definition. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die gröbste Topologie auf $\prod_{i\in I} X_i$, für welche alle kanonischen Abbildungen $\pi_i\colon \prod_{j\in I} X_j \to X_i$, $(x_j)_{j\in I} \mapsto x_i$, stetig sind, heißt *Produkttopologie*.

1.14 Satz. *Sei* $\mathcal{B}$ *die Menge aller Produkte der Form* $\prod_{i\in I} G_i$*, wobei alle* G_i *offen in* X_i *und nur endlich viele* G_i *von* X_i *verschieden sind. Eine Menge* $M \subset \prod_{i\in I} X_i$ *ist genau dann offen in der Produkttopologie, wenn sie Vereinigung von Elementen von* $\mathcal{B}$ *ist.*

Sind alle X_i *Hausdorffsch, so ist auch* $\prod_{i\in I} X_i$ *Hausdorffsch.*

1.15 Definition. Sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum. Ein System $\mathcal{F}$ nicht-leerer Teilmengen von X heißt *Filter*, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind

(a) Ist $F \in \mathcal{F}$ und $M \supset F$, so gilt $M \in \mathcal{F}$.

(b) Sind $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, so gilt $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

1.16 Beispiel. (a) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Sei $\mathcal{F}$ das System aller Teilmengen von X, welche fast alle Glieder der Folge enthalten. Dann ist $\mathcal{F}$ ein Filter.

(b) Für jeden Punkt $a \in X$ bildet die Menge aller Umgebungen von a einen Filter. Man nennt ihn den *Umgebungsfilter* von a.

1.17 Definition. Ein Filter *konvergiert* gegen a, wenn er den Umgebungsfilter von a enthält.

1.18 Beispiel. Der zu einer Folge gemäß Beispiel 1.16 gebildete Filter konvergiert genau dann gegen a, wenn die Folge gegen a konvergiert.

1.19 Definition. Ein Hausdorffscher topologischer Raum X heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt kompakt, wenn sie kompakt in der Teilraumtopologie ist.

1.20 Bemerkung. Ein Hausdorffscher topologischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn es zu jeder Familie $(A_i)_{i\in I}$ von abgeschlossenen Mengen mit $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$ eine endliche Teilmenge $J \subset I$ gibt, so dass $\bigcap_{i\in J} A_i = \emptyset$.

1.21 Satz. *Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen Hausdorffschen topologischen Räumen. Wenn X kompakt ist, dann auch $f(X)$.*

1.22 Definition. Ein Filter $\mathcal{F}$ in einem topologischen Raum X ist ein *Ultrafilter*, wenn für jede Teilmenge $A \subset X$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

1.23 Lemma. *Sei $\mathcal{F}$ ein Filter in einem topologischen Raum X, sei $A \subset X$ mit $X \setminus A \notin \mathcal{F}$. Dann existiert ein Filter $\mathcal{G}$ mit $A \in \mathcal{G}$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.*

1.24 Satz (Ultrafiltersatz). *Zu jedem Filter $\mathcal{F}$ gibt es einen Ultrafilter, der ihn umfasst.*

1.25 Satz. *Ein Hausdorffscher topologischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn jeder Ultrafilter in X konvergiert.*

1.26 Theorem (Tychonoff). *Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Das Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ ist genau dann kompakt, wenn alle X_i kompakt sind.*

2 Frécheträume

2.1 Definition. Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine *Halbnorm* auf E ist eine Funktion $p\colon E \to [0,\infty)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(N1) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$.

(N2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in E$ (Dreiecksungleichung).

Eine Halbnorm, die auch noch die Eigenschaft

(N3) $p(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,

besitzt, ist eine *Norm*.

2.2 Beispiel. (a) Sei $E = C(\mathbb{R}^N)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\|f\|_n = \sup_{|x|\leq n} |f(x)|$ eine Halbnorm auf $C(\mathbb{R}^N)$. Sie ist keine Norm.

(b) Sei $E = H(\mathbb{C})$ der Raum der ganzen Funktionen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\|f\|_n = \sup_{|z|\leq n} |f(z)|$ eine Norm auf $H(\mathbb{C})$. Für $n \neq m$ sind die Normen $\|\cdot\|_n$ und $\|\cdot\|_m$ nicht äquivalent.

2.3 Definition. Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) $M \subset E$ heißt *konvex*, wenn für je zwei $x, y \in M$ die Verbindungsstrecke $\{\lambda x + (1-\lambda) y \mid \lambda \in [0,1]\}$ in M liegt.

(b) M heißt *absolutkonvex*, wenn für alle Wahlen von $x, y \in M$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ auch $\lambda x + \mu y \in M$.

Beispiel. Sei p eine Halbnorm und $r > 0$. Dann sind $p^{-1}([0,r))$ und $p^{-1}([0,r])$ absolutkonvex.

2.4 Definition. Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, der eine Topologie trägt. Ein System $\mathcal{U}$ von Umgebungen der Null heißt *Nullumgebungsbasis*, wenn es zu jeder Umgebung V der Null ein Element $U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset V$ gibt.

Beispiel. Sei E ein normierter Raum. Dann sind $\{B_{1/n}(0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\{\overline{B}_{1/n}(0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ Nullumgebungsbasen. Hierbei $B_\epsilon(x) = \{y \in E \mid \|x-y\| < \epsilon\}$.

2.5 Definition. (a) Ein *lokalkonvexer* Raum ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum E zusammen mit einer Topologie, so dass

(i) E Hausdorffsch ist,

(ii) die Addition $+\colon E \times E \to E$, $(x, y) \mapsto x + y$, stetig ist,

(iii) die Multiplikation mit Skalaren $\cdot\colon \mathbb{K} \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, stetig ist,

(iv) E eine Nullumgebungsbasis besitzt, die aus absolutkonvexen Mengen besteht.

(b) Ein *Fréchetraum* ist ein lokalkonvexer Raum, dessen Topologie von einer Metrik herkommt und der in dieser Metrik vollständig ist.

Beispiel. Banachräume sind Fréchetträume.

2.6 Definition. Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) $M \subset E$ heißt *absorbierend*, wenn es zu jedem $x \in E$ ein $R > 0$ gibt, so dass $x \in RM$.

(b) Sei $A \subset E$ absorbierend und absolutkonvex. Das *Minkowski-Funktional* $\|\cdot\|_A$ ist definiert durch

$$\|x\|_A = \inf\{t > 0 \mid x \in tA\}.$$

2.7 Satz. *Sei E ein lokalkonvexer Raum, sei U eine absolutkonvexe Nullumgebung.*

(a) U ist absorbierend.

(b) Das Minkowski-Funktional $\|\cdot\|_U$ ist eine stetige Halbnorm auf E.

(c) $\mathring{U} = \{x \in E \mid \|x\|_U < 1\} \subset U \subset \{x \in E \mid \|x\|_U \leq 1\} = \overline{U}$.

(d) Für $\lambda \in [0, 1)$ gilt $\lambda\overline{U} \subset \mathring{U}$.

2.8 Lemma. *Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und es sei $p_1 \leq p_2 \leq \ldots$ eine Folge von Halbnormen auf E. Falls es zu jedem $x \in E \setminus \{0\}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p_n(x) \neq 0$ gibt, so wird durch*

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-1} \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)}$$

eine Metrik auf E gegeben.

2.9 Lemma. *Der $\mathbb{K}$-Vektorraum E sei wie in Lemma 2.8 mit einer Metrik versehen.*

(a) Eine Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in (E, d) gegen x, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n\to\infty} p_n(x_j - x) = 0$.

(b) Eine Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $K \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $p_n(x_j - x_k) < \epsilon$ für alle $j, k \geq K$.

2.10 Satz. *Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und es sei $p_1 \le p_2 \le \dots$ eine Folge von Halbnormen auf E derart, dass es zu jedem $x \in E \setminus \{0\}$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $p_n(x) \neq 0$. Mit der Metrik aus Lemma 2.8 wird E zu einem metrischen lokalkonvexen Raum mit Nullumgebungsbasis $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, wobei $U_n = \{x \in E \mid p_n(x) < \frac{1}{n}\}$.*

2.11 Bemerkung. (a) Normierte Räume fallen unter diese Beschreibung, wenn man alle p_n gleich der Norm wählt.

(b) Wenn E ein lokalkonvexer Raum mit abzählbarer, absolutkonvexer Nullumgebungsbasis $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist und man $U_n = \bigcap_{j=1}^{n} V_j$ setzt, so ist $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ebenfalls eine absolutkonvexe Nullumgebungsbasis. Ist nun p_n das Minkowski-Funktional von U_n, so sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt und die so konstruierte Metrik induziert die Ausgangstopologie.

2.12 Bemerkung. (a) Sei Ω ein topologischer Raum. Eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakter Teilmengen von Ω ist eine *kompakte Ausschöpfung* von Ω, wenn $K_1 \subset \mathring{K}_2 \subset K_2 \subset \mathring{K}_3 \subset \dots \subset \Omega$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$.

(b) Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ wird eine kompakte Ausschöpfung gegeben durch

$$K_n = \Big\{x \in \Omega \;\Big|\; |x| \le n,\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \ge \frac{1}{n}\Big\}.$$

2.13 Beispiel. (a) Für $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen bezeichne $C(\Omega)$ den Raum aller stetigen Funktionen auf Ω. Es sei $K_1 \subset \mathring{K}_2 \subset K_2 \subset \mathring{K}_3 \subset \dots \subset \Omega$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω. Dann wird $C(\Omega)$ durch das Halbnormensystem $(\|\cdot\|_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ zu einem Fréchetraum, wobei

$$\|f\|_K = \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

(b) Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist $C^k(\Omega)$ der Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen. Er wird versehen mit dem Halbnormensystem

$$\|f\|_n = \sup_{x\in K_n} \max_{|\alpha|\le k} |f^{(\alpha)}(x)|.$$

Auf diese Weise wird $C^k(\Omega)$ zu einem Fréchetraum.

(c) Der Raum $C^\infty(\Omega)$ aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen wird versehen mit dem Halbnormensystem

$$\|f\|_n = \sup_{x\in K_n} \max_{|\alpha|\le n} |f^{(\alpha)}(x)|.$$

Auf diese Weise wird $C^\infty(\Omega)$ zu einem Fréchetraum.

(d) Für $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen bezeichne $H(\Omega)$ den Raum der holomorphen Funktionen auf Ω. Es sei $K_1 \subset \mathring{K}_2 \subset K_2 \subset \mathring{K}_3 \subset \cdots \subset \Omega$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω. Dann wird $H(\Omega)$ durch das Halbnormensystem $(\|\cdot\|_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ aus (a) zu einem Fréchetraum.

2.14 Definition. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ heißt *schnell fallend*, wenn

$$\lim_{|x|\to\infty} x^\alpha f(x) = 0$$

für alle Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Der Raum

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^N) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \mid D^\beta f \text{ schnell fallend für jedes } \beta \in \mathbb{N}_0^N\}$$

heißt *Schwartzraum*. Die Elemente von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ heißen *Schwartzfunktionen*.

2.15 Satz. *Versieht man den Schwartzraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ mit dem Halbnormensystem $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei*

$$\|f\|_n = \max_{|\beta|\le n} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} (1+|x|^2)^{n/2} |f^{(\beta)}(x)|,$$

so wird $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ zu einem Fréchetraum.

2.16 Bezeichnung. Wenn die Topologie des Fréchetraums E durch das Halbnormensystem $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben wird, dann bezeichnet man das Halbnormensystem auch als *Fundamentalsystem von Halbnormen.*

2.17 Satz. *Es seien E, F metrische lokalkonvexe Räume mit Fundamentalsystemen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es sei $f\colon E \to F$ linear. Dann sind äquivalent*

(a) f *ist stetig.*

(b) f *ist stetig in Null.*

(c) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es $m \in \mathbb{N}$ und $C > 0$, so dass $q_n(f(x)) \le C p_m(x)$ für alle $x \in E$.

2.18 Definition. Seien E und F lokalkonvexe Räume. Der $\mathbb{K}$-Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen $E \to F$ wird mit $L(E,F)$ bezeichnet. Man schreibt $E' = L(E,\mathbb{K})$ und bezeichnet E' als *Dualraum* von E.

2.19 Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann ist die Abbildung

$$D\colon H(\Omega) \to H(\Omega), f \mapsto f',$$

stetig.

2.20 Satz. *Sei* E *ein metrischer lokalkonvexer Raum und sei* $F \subset E$ *ein abgeschlossener Unterraum. Versieht man* E/F *mit dem Fundamentalsystem*

$$q_n([x]) = \inf_{y \in F} p_n(x+y) = \inf_{z \in [x]} p_n(z).$$

so wird er zu einem metrischen lokalkonvexen Raum.

2.21 Satz. *Sei* E *ein Fréchetraum mit Fundamentalsystem* $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *und sei* F *ein abgeschlossener Unterraum von* E*. Dann ist* E/F *ein Fréchetraum.*

2.22 Satz. *(a) Wenn* E *ein Fréchetraum und* F *ein abgeschlossener Unterraum von* E *ist, dann ist auch* F *ein Fréchetraum.*

(b) Wenn E *ein metrischer lokalkonvexer Raum und* F *ein Unterraum ist, der in der Teilraumtopologie ein Fréchetraum ist, dann ist* F *abgeschlossen.*

2.23 Satz (Homomorphiesatz). *Seien* E, F *metrische lokalkonvexe Räume und sei* $f \in L(E, F)$*. Wenn* G *ein abgeschlossener Unterraum von* E *mit* $G \subset \ker f$*, ist dann existiert ein eindeutig bestimmtes* $\varphi \in L(E/G, F)$ *mit* $f = \varphi \circ \pi$*.*

2.24 Beispiel. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+) = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)/\{f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \mid \forall x \text{ mit } x_n > 0 : f(x) = 0\}$. Auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+)$ gibt es die Punktauswertung δ_x für alle x mit $x_n \geq 0$.

2.25 Bemerkung. Es sei E ein lokalkonvexer Raum, dessen Topologie durch eine Metrik gegeben wird. Dann besitzt E eine abzählbare, absolutkonvexe Nullumgebungsbasis. In Bemerkung 2.11 wurde dargelegt, wie man hieraus ein abzählbares Fundamentalsystem von Halbnormen erhält.

3 Die schwache Topologie

Ich wiederhole aus “Einführung in die Funktionalanalysis”

3.1 Definition. Ein *sublineares Funktional* auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum E ist eine Funktion $p\colon E \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

(a) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für alle $\lambda \geq 0$, $x \in E$,

(b) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in E$.

3.2 Theorem (Satz von Hahn-Banach). *Seien E ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, p ein sublineares Funktional auf E, $F \subset E$ ein Unterraum und $y\colon F \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit $y(x) \leq p(x)$ für alle $x \in F$. Dann existiert ein lineares Funktional Y auf E mit $Y|_F = y$ und $Y(x) \leq p(x)$ für alle $x \in E$.*

3.3 Satz. *Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei p eine Halbnorm auf E, sei $F \subset E$ ein Unterraum, und sei $y\colon F \to \mathbb{K}$ linear mit $|y(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in F$. Dann existiert $Y\colon E \to \mathbb{K}$ linear mit $Y|_F = y$ und $|Y(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in E$.*

3.4 Korollar. *Sei E ein metrischer lokalkonvexer Raum, sei $F \subset E$ ein Unteraum, der mit der Teilraumtopologie versehen ist. Dann besitzt jedes $\varphi \in F'$ eine stetige lineare Fortsetzung nach E'.*

3.5 Beispiel. Sei $E = C(\mathbb{R}^2)$ und sei $F = H(\mathbb{C})$, wobei wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren und auf diese Weise F als Unterraum von E auffassen. Sei $\varphi \in F'$ gegeben durch $\varphi(f) = f'(0)$. Dann besitzt φ eine stetige lineare Fortsetzung $\Phi \in E'$. Zufällig kann man solche Fortsetzungen in diesem Fall sogar angeben, z. B.

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta$$

für jedes $R > 0$. Alle diese Fortsetzungen sind verschieden.

3.6 Definition. Sei E ein lokalkonvexer Raum und E' sein Dualraum. Die gröbste lokalkonvexe Topologie auf E, für die alle Elemente von E' stetig sind, ist die *schwache Topololgie* auf E, in Zeichen $\sigma(E, E')$.

Bemerkung. Die schwache Topologie ist gröber als die Ausgangstopologie. Sie hat also weniger offene Mengen und mehr konvergente Folgen als diese.

3.7 Satz. *Sei* E *ein metrischer lokalkonvexer Raum. Sei* $\mathcal{B}$ *das System aller Mengen der Form* $x + \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(B_1(0))$*, wobei* $x \in E$*,* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $\varphi_i \in E'$*. Eine Teilmenge* $M \subset E$ *ist genau dann offen in der schwachen Topologie, wenn* M *Vereinigung von Elementen aus* $\mathcal{B}$ *ist.*

Hier verwenden wir die Konvention $\bigcap_{i=1}^{0} G_i = E$.

3.8 Bemerkung. (a) Satz 3.7 gilt auch für beliebige lokalkonvexe Räume E.

(b) Für $\varphi \in E'$ und $x \in E$ schreiben wir $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$. Dann ist $\sigma(E, E')$ die gröbste localkonvexe Topologie, für welche alle Funktionen $\langle \varphi, \cdot \rangle$, $\varphi \in E'$, stetig sind.

(c) Analog definiert man $\sigma(E', E)$ als die gröbste lokalkonvexe Topologie auf E', für welche alle Funktionen $\langle \cdot, x \rangle$, $x \in E$, stetig sind. Man zeigt analog, dass $\sigma(E', E)$ eine lokalkonvexe Topologie auf E'. Das System $\mathcal{B}$ besteht dabei aus allen Mengen der Form $\varphi + \bigcap_{i=1}^{n} \{\psi \in E' \mid \text{für } i = 1, \dots, n\colon |\psi(x_i)| < \epsilon_i\}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\epsilon_i > 0$ und $x_i \in E$. Hierbei wird der Satz von Hahn-Banach nicht verwendet.

(d) Wenn E ein normierter Raum ist, dann wird $\sigma(E', E)$ auch als *schwach*-Topologie* auf E' bezeichnet. Wenn E nicht reflexiv ist, unterscheidet sie sich im allgemeinen von der schwachen Topologie $\sigma(E', E'')$.

3.9 Beispiel. Für $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist die schwache Topologie $\sigma(\omega, \omega')$ gleich der Produkttopologie und damit metrisch.

3.10 Satz. *Sei* E *ein lokalkonvexer Raum. Eine Folge* $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *konvergiert genau dann in der schwachen Topologie* $\sigma(E, E')$ *gegen* x*, wenn* $\lim_{j \to \infty} \varphi(x_j) = \varphi(x)$ *für alle* $\varphi \in E'$*.*

Eine Folge $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *in* E' *konvergiert genau dann in der Topologie* $\sigma(E', E)$ *gegen* φ*, wenn* $\lim_{j \to \infty} \varphi_j(x) = \varphi(x)$ *für alle* $x \in E$*.*

3.11 Satz (Satz von Alaoglu-Bourbaki). *Sei* E *ein metrischer lokalkonvexer Raum, sei* $U \subset E$ *eine Nullungebung und setze* $U^\circ = \{\varphi \in E' \mid |\varphi(x)| \le 1 \forall x \in U\}$*. Dann ist* U° *kompakt in der Topologie* $\sigma(E', E)$*.*

3.12 Beispiel. Sei E ein normierter Raum und sei $U = B_1(0)$. Dann ist U° die abgeschlossene Einheitskugel V von E'. Der Satz von Alaoglu-Bourbaki sagt also aus, dass die abgeschlossene Einheitskugel von E' schwach*-kompakt ist.

Wenn F ein reflexiver Banachraum ist, dann ist $F = E'$ für $E = F'$. Die schwache Topologie auf F ist $\sigma(F, F')$. Wegen $F' = E$ stimmt sie mit der schwach*-Topologie $\sigma(E', E)$ überein. Hat man nun eine beschränkte Folge in F, so liegt sie in einem Vielfachen von V. Da V schwach kompakt ist, besitzt die Folge eine schwach konvergente Teilfolge. Das ist der Satz von Hilbert-Banach.

3.13 Beispiel. Sei $E = H(\mathbb{C})$. Dann $E' = \{(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \mid \exists R, C > 0\, \forall j \in \mathbb{N}_0 : |a_j| \leq CR^j\}$, wobei

$$\langle (a_j)_{j\in\mathbb{N}_0}, f\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{f^{(j)}(0)}{j!}.$$

4 Der Dualraum

4.1 Definition. Eine Teilmenge B eines lokalkonvexen Raums heißt *beschränkt*, wenn es zu jeder Nullumgebung U in E ein $R > 0$ gibt, so dass $B \subset RU$.

Bemerkung. An der Metrik kann man die Beschränktheit nicht ohne weiteres ablesen. Beispielsweise gilt in der Metrik aus Lemma 2.8 für je zwei $x, y \in E$ stets $d(x, y) \leq 1$.

4.2 Beispiel. Eine Teilmenge $M \subset H(\mathbb{C})$ ist genau dann beschränkt, wenn es eine stetige Funktion $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $|f(z)| \leq h(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, $f \in M$.

4.3 Definition. Es sei E ein lokalkonvexer Raum. Ein System $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha\in A}$ von Halbnormen auf E heißt *Fundamentalsystem* von Halbnormen, wenn

(a) jedes $\|\cdot\|_\alpha$ stetig ist,

(b) zu jeder Nullumgebung U in E ein $\alpha \in A$ und ein $\epsilon > 0$ existieren, so dass $\{x \in E \mid \|x\|_\alpha < \epsilon\} \subset U$.

Bemerkung. Dieser Begriff erweitert Bezeichnung 2.16.

4.4 Lemma. *Jeder lokalkonvexe Raum E hat ein Fundamentalsystem von Halbnormen. Jedes Fundamentalsystem $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha\in A}$ von Halbnormen hat die folgenden Eigenschaften:*

(a) Für jede $x \in E \setminus \{0\}$ gibt es $\alpha \in A$ mit $\|x\|_\alpha \neq 0$.

(b) Für $\alpha, \beta \in A$ gibt es $\gamma \in A$ mit $\max(\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta) \leq C\|\cdot\|_\gamma$.

4.5 Satz. *Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie von Halbnormen auf E mit den Eigenschaften (a) und (b) aus Lemma 4.4. Dann existiert eine eindeutig bestimmte lokalkonvexe Topologie auf E, für die $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Fundamentalsystem ist.*

4.6 Bemerkung. Sei E ein lokalkonvexer Raum mit Fundamentalsystem $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha\in A}$. Eine Teilmenge $M \subset E$ ist genau dann beschränkt, wenn $\sup_{x\in M}\|x\|_\alpha < \infty$ für alle $\alpha \in A$.

4.7 Definition. Sei E ein lokalkonvexer Raum und E' sein Dualraum. Die *starke Topologie* auf E' wird gegeben durch das Halbnormensystem $(\|\cdot\|_B)_{B\in\mathcal{B}}$, wobei $\mathcal{B}$ das System der beschränkten Teilmengen von E ist und $\|\varphi\|_B = \sup_{x\in B}|\varphi(x)|$.

4.8 Bemerkung. (a) Die starke Topologie ist mindestens so stark wie die schwache.

Beachte dazu, dass $\sigma(E', E)$ durch das Halbnormensystem $\{\|\cdot\|_{\{x_1,\dots,x_n\}} \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in E\}$ mit $\|\varphi\|_{\{x_1,\dots,x_n\}} = \max_{i=1,\dots,n} |\varphi(x_i)|$ gegeben wird.

(b) Wenn man andeuten will, dass E' mit der starken Topologie versehen ist, dann schreibt man E'_b.

(c) Entsprechend schreibt man E'_σ für die schwache Topologie.

4.9 Beispiel. Für $z \in \mathbb{C}$ sei $\delta'_z(f) = f'(z)$. Dann konvergiert die Folge $(\delta'_{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ in $H(\mathbb{C})'_b$ gegen δ'_0.

Man kann jetzt verschiedene Aussagen, die wir für metrische lokalkonvexe Räume gezeigt hatten, allgemeiner erhalten.

4.10 Satz. *Es seien E, F lokalkonvexe Räume mit Fundamentalsystemen $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ und $(q_\beta)_{\beta\in B}$ und es sei $f\colon E \to F$ linear. Dann sind äquivalent*

(a) f ist stetig.

(b) f ist stetig in Null.

(c) Zu jedem $\beta \in B$ gibt es $\alpha \in A$ und $C > 0$, so dass $q_\beta(f(x)) \leq C p_\alpha(x)$ für alle $x \in E$.

4.11 Satz. *Sei E ein lokalkonvexer Raum mit Fundamentalsystem $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ und sei $F \subset E$ ein abgeschlossener Unterraum. Versieht man E/F mit dem Fundamentalsystem*

$$q_\alpha([x]) = \inf_{y\in F} p_\alpha(x+y) = \inf_{z\in[x]} p_\alpha(z).$$

so wird E/F zu einem lokalkonvexen Raum.

4.12 Satz (Hahn-Banach). *Sei E ein lokalkonvexer Raum, sei $F \subset E$ ein Unteraum, der mit der Teilraumtopologie versehen ist. Dann besitzt jedes $\varphi \in F'$ eine stetige lineare Fortsetzung nach E'.*

4.13 Satz (Alaoglu-Bourbaki). *Sei E ein lokalkonvexer Raum, sei $U \subset E$ eine Nullumgebung und setze $U^\circ = \{\varphi \in E' \mid |\varphi(x)| \leq 1 \forall x \in U\}$. Dann ist U° kompakt in der Topologie $\sigma(E', E)$.*

5 Grothendieck-Köthe Dualität

In diesem Abschnitt hat K immer *unendlich viele* Elemente.

5.1 Definition. Für $K \subset \mathbb{C}$ kompakt definieren wir den Raum $\mathcal{A}(K)$ der *analytischen Funktionen* auf K als die Menge derjenigen stetigen Funktionen f auf K, die zu jedem $z \in K$ eine holomorphe Fortsetzung in eine geeignete Umgebung von z besitzen.

5.2 Notation. Im weiteren sei $K \subset \mathbb{C}$ ein zusammenhängendes Kompaktum. Zu $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ gebe es offene Mengen $G_1 \subset \overline{G}_1 \subset G_2 \subset \overline{G}_2 \subset \cdots \subset \Omega$, so dass $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Dabei soll G_1 ein Ringgebiet der Form $RG(0, \infty, R)$ umfassen. Zu jedem n gebe es einen stückweisen C^1-Weg γ_n, so dass $\partial G_n = \mathrm{Bild}(\gamma_n)$ und $\mathrm{ind}_z(\gamma_n) = 1$ für alle $z \in K$. Ferner setzen wir voraus, dass $U_n = \mathbb{C} \setminus \overline{G}_n$ für jedes n ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist.

Wir definieren ferner $H_0(\Omega) = \{f \in H(\Omega) \mid \lim_{z \to \infty} f(z) = 0\}$ und versehen ihn mit dem Fundamentalsystem $\|f\|_n = \sup_{z \in \overline{G}_n} |f(z)|$. Dadurch wird $H_0(\Omega)$ zu einem Fréchetraum.

5.3 Bemerkung. Mit den Bezeichnungen aus 5.2 gilt

$$\mathcal{A}(K) = \bigcup_{n=1}^{\infty} H(U_n), \tag{5.1}$$

wenn man für $m > n$ den Raum $H(U_n)$ als Unterraum von $H(U_m)$ auffasst. Dabei wird verwendet, dass K unendlich viele Punkte hat.

Im Fall $K = \{0\}$ würde man (5.1) als Definition von $\mathcal{A}(K)$ wählen.

5.4 Lemma. *Mit den Bezeichnungen aus 5.2 definiere*

$$\Phi \colon \mathcal{A}(K) \to H_0(\Omega)', \quad \Phi(u)(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} f(\zeta) u(\zeta) d\zeta,$$

wobei n so zu wählen ist, dass $u \in H(U_{n-1})$. Dann ist Φ $\mathbb{C}$-linear.

5.5 Definition. Es sei G eine echte offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Der Raum $H^\infty(G)$ besteht aus allen beschränkten holomorphen Funktionen auf G. Er ist versehen mit der Supremumsnorm.

5.6 Lemma. *Sei* $f \in H_0(\Omega)$ *und sei* $\gamma\colon [0,1] \to U_n$ *ein* C^1*-Weg. Für* $k \in \mathbb{N}$ *definiere die Riemannsumme*

$$R_k\colon G_n \to \mathbb{C}, \qquad w \mapsto \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \frac{f\left(\gamma\left(\frac{j}{k}\right)\right)}{w-\gamma\left(\frac{j}{k}\right)}\gamma'\left(\frac{j}{k}\right).$$

Dann konvergiert R_k *in* $H^\infty(G_n)$ *gegen* $w \mapsto \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{w-\zeta}d\zeta$.

5.7 Lemma. *Sei* $f \in H_0(\Omega)$. *Für jedes* $w \in G_n$ *gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{n+1}} \frac{f(\zeta)}{w-\zeta}d\zeta = f(w).$$

5.8 Theorem (Grothendieck-Köthe Dualität). *Die Abbildung* Φ *aus Lemma 5.4 ist ein* $\mathbb{C}$*-linearer Isomorphismus.*

5.9 Bemerkung.

$$\mathcal{A}(K) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H(U_n) \Big/ F$$

für

$$F = \left\{ \left(f_1, \dots, f_n, -\sum_{j=1}^{n} f_j|_{U_{n+1}}, 0, \dots \right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ f_j \in H(U_j) \text{ für } j = 1, \dots, n \right\},$$

wobei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} H(U_n)$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{A}(K)$ identifiziert wird.

6 (DF)-Räume

6.1 Definition. Sei E ein lokalkonvexer Raum, sei $M \subset E$ und sei $N \subset E'$. Wir definieren die *Polaren*

$$M^\circ = \{\varphi \in E' \mid \forall x \in M : |\varphi(x)| \leq 1\}$$
$$^\circ N = \{x \in E \mid \forall \varphi \in N : |\varphi(x)| \leq 1\}.$$

6.2 Lemma. *Sei* E *ein lokalkonvexer Raum, sei* $U \subset E$ *eine Nullumgebung. Dann ist* U° *beschränkt in* E'_b.

6.3 Definition. Sei E ein lokalkonvexer Raum und sei $M \subset E$.

(a) M heißt *bornivor*, wenn es zu jeder beschränkten Menge B in E ein $R > 0$ mit $B \subset RM$ gibt.

(b) M heißt *Tonne*, wenn M absolutkonvex, abgeschlossen und absorbierend ist.

(c) E heißt *tonneliert*, wenn jede Tonne in E eine Nullumgebung ist, und *quasitonneliert*, wenn jede bornivore Tonne in E eine Nullumgebung ist.

6.4 Bemerkung. Wenn E ein lokalkonvexer Raum und $M \subset E'$ beschränkt ist, dann ist $^\circ M$ eine bornivore Tonne.

6.5 Satz. *Metrische lokalkonvexe Räume sind quasitonneliert.*

6.6 Notation. Ein System $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist ein *Fundamentalsystem für die beschränkten Mengen* eines lokalkonvexen Raums, wenn alle B_α beschränkt sind und jede beschränkte Menge in einem B_α enthalten ist.

6.7 Satz. *Sei* E *ein metrischer lokalkonvexer Raum. Dann besitzt* E'_b *ein abzählbares Fundamentalsystem für die beschränkten Mengen.*

6.8 Bezeichnung. Es gelten weiterhin die Vereinbarungen aus 5.2. Im Beweis der Grothendieck-Köthe Dualität hatten wir folgendes gesehen: Zu jedem $u \in H(U_{n-1})$ liegt $\Phi(u)$, definiert durch

$$\langle \Phi(u), f \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} f(\zeta) u(\zeta) d\zeta,$$

in $H_0(\Omega)'$ und besitzt eine stetig lineare Fortsetwung nach $H^\infty(G_{n+1})'$. Hat man umgekehrt ein $u \in \mathcal{A}(K)$, so dass $|\langle \Phi(u), f \rangle| \leq C \sup_{w \in G_{n+1}} |f(w)|$ für alle $f \in \mathcal{A}(K)$, dann besitzt $\Phi(u)$ eine stetige Fortsetzung $S \in H^\infty(G_{n+1})'$, deren Operatornorm höchstens C beträgt. Für jedes solche S gilt

$$u(z) = \left\langle S, \frac{1}{z-w} \right\rangle_w$$

für alle $z \in U_{n+1}$.

6.9 Beispiel. Setzt man $B_n = \{u \in H(U_u) \mid \sup_{z \in U_n} |u(z)| \leq n\}$, so ist $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Fundamentalsystem für die beschränkten Mengen von $\mathcal{A}(K)$.

6.10 Definition. Ein *(DF)-Raum* ist ein lokalkonvexer Raum E mit den folgenden Eigenschaften:

(a) E besitzt ein abzählbares Fundamentalsystem für die beschränkten Mengen.

(b) Falls der Durchschnitt V von abzählbar vielen, absolutkonvexen Nullungebungen bornivor ist, dann ist V eine Nullumgebung.

6.11 Satz (siehe Meise-Vogt, Satz 25.7). *Für jeden Fréchetraum* E *ist* E'_b *ein (DF)-Raum.*

6.12 Satz (siehe Meise-Vogt, Satz 25.9). *Für jeden (DF)-Raum* F *ist* F'_b *ein Fréchetraum.*

6.13 Satz. *Es seien* E *ein metrischer lokalkonvexer und* F *ein (DF)-Raum und es sei* $T \in L(E, F)$. *Dann gibt es eine Nullumgebung* U *in* F, *für welche* $T(U)$ *beschränkt in* E *ist.*

6.14 Korollar. *Wenn ein (DF)-Raum eine Metrik trägt, dann ist er normiert.*

7 Vollständigkeit

7.1 Definition. (a) Eine *gerichtete Menge* ist eine partiell geordnete Menge, welche zu je zwei Elementen α und β ein γ mit $\alpha \leq \gamma$ und $\beta \leq \gamma$ enthält.

(b) Sei X ein topologischer Raum. Ein *Netz* in X ist eine Familie $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ mit einer gerichteten Indexmenge.

(c) Eine Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ *konvergiert* gegen y, wenn es zu jeder Umgebung U von y ein $\alpha \in A$ gibt, so dass $x_\beta \in U$ für alle $\beta \geq \alpha$. Man schreibt dann $\lim_{\alpha \in A} x_a = y$.

7.2 Bemerkung. (a) Wenn X Hausdorffsch ist, dann besitzt jedes Netz höchstens einen Grenzwert. Dies ist eine direkte Folge davon, dass A gerichtet ist.

(b) Sei $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein Netz. Setze

$$\mathcal{F} = \{M \subset X \mid \exists \alpha \in A \forall \beta \geq \alpha : x_\beta \in M\}.$$

Dann ist $\mathcal{F}$ ein Filter. Er konvergiert genau dann gegen y, wenn $\lim_{\alpha \in A} x_\alpha = y$.

7.3 Definition. (a) Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ in einem lokalkonvexen Raum ist ein *Cauchy-Netz*, wenn es zu jeder Nullumgebung U ein $\alpha \in A$ gibt, so dass $x_\beta - x_\gamma \in U$ für alle $\beta, \gamma \geq \alpha$.

(b) Ein lokalkonvexer Raum E heißt *vollständig*, wenn jedes Cauchy-Netz in E konvergiert.

(c) E ist *folgenvollständig*, wenn jede Cauchyfolge in E konvergiert.

Bemerkung. Der Begriff “vollständig” macht für einen topologischen Raum keinen Sinn. Man benötigt wenigstens einen uniformen Raum. Eine ausführliche Darstellung findet man in “Topologie” von Schubert.

7.4 Lemma. *Frécheträume sind vollständig im Sinne der Definition 7.3.*

7.5 Satz. *Sei E ein metrischer lokalkonvexer Raum. Dann ist E'_b vollständig.*

Bemerkung. (a) Man kann zeigen, dass jeder lokalkonvexe Raum eine vollständige Hülle besitzt (siehe Meise und Vogt, Satz 22.21).

(b) Wenn E unstetige Linearformen besitzt, dann ist E'_σ nicht vollständig (siehe Kaballo, Aufbaukurs, Abschnitt 8.1).

8 Der Satz von der offenen Abbildung

8.1 Definition. Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *offen*, wenn für jede offene Teilmenge U von X die Bildmenge $f(U)$ offen ist. Sie heißt *abgeschlossen*, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge U von X die Bildmenge $f(U)$ abgeschlossen ist.

8.2 Theorem (Satz von der offenen Abbildung). E *und* F *seien Frécheträume.* $A\colon E \to F$ *sei linear, stetig und surjektiv. Dann ist* A *offen.*

8.3 Theorem (Banachscher Isomorphiesatz). E *und* F *seien Frécheträume.* $A\colon E \to F$ *sei linear, stetig und bijektiv. Dann ist* A^{-1} *ein linear topologischer Isomorphismus.*

8.4 Definition. Seien X und Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Der *Graph* von f ist die Menge

$$\mathcal{G}(f) = \big\{(x, f(x)) \bigm| x \in X\big\} \subset X \times Y.$$

8.5 Lemma. *Seien* E *und* F *metrische lokalkonvexe Räume, und sei* $A\colon E \to F$ *linear. Dann ist* $\mathcal{G}(A)$ *genau dann abgeschlossen, wenn für jede Nullfolge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, für die* $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen ein Element* $y \in F$ *konvergiert, bereits* $y = 0$ *gilt.*

8.6 Theorem (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Es seien* E *und* F *Frécheträume. Die Abbildung* $A\colon E \to F$ *sei linear, und ihr Graph sei abgeschlossen in* $E \times F$*. Dann ist* A *stetig.*

8.7 Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen. Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $C^\infty(\Omega)$ mit den Eigenschaften

(a) $(C^\infty, \mathcal{T})$ ist ein Fréchetraum.

(b) Für jedes $x \in \Omega$ ist die Punktauswertung $\delta_x\colon f \mapsto f(x)$ stetig.

Dann ist $\mathcal{T}$ die Topologie aus Beispiel 2.13.

9 Die Fouriertransformation für temperierte Distributionen

9.1 Definition. Die Elemente von $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ heißen *temperierte Distributionen.*

Bemerkung. $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ wird entweder mit der starken oder mit der schwachen Topologie versehen (bei uns in der Regel mit der starken). Der Vorteil der starken Topologie ist die Vollständigkeit.

Bemerkung. Die *Fouriertransformierte* von $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, insbesondere also von $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, ist definiert als

$$(\mathcal{F}f))(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-ix\xi} dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Theorem 16.13 der Einf. Funktionalanalysis von 2014 besagt, dass die Fouriertransformation eine Bijektion von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ auf sich ist.

9.2 Satz. $\mathcal{F}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ *ist ein linear topologischer Isomorphismus.*

9.3 Definition. Seien E und F lokalkonvexe Räume, und sei $A \in L(E, F)$. Der *transponierte Operator* $A' \in L(F', E')$ wird definiert durch

$$\langle A'\varphi, x\rangle = \langle \varphi, Ax\rangle, \qquad \varphi \in F',\ x \in E.$$

9.4 Lemma. $A' \in L(F'_b, E'_b)$.

9.5 Definition. Die *Fouriertransformation* $\mathcal{F}\colon \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ wird definiert als die Transponierte von $\mathcal{F}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$.

9.6 Bemerkung. $\mathcal{F}\colon \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)_b \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)_b$ ist ein topologischer Isomorphismus.

9.7 Beispiel.

$$\langle \mathcal{F}\delta_0, f\rangle = \langle \delta_0, \mathcal{F}f\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \langle 1, f\rangle.$$

10 Banachalgebren

10.1 Definition. (a) Eine $\mathbb{C}$-*Algebra* ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum A mit einer Multiplikation $\cdot\colon A \times A \to A$, so dass A ein Ring mit Eins und der folgenden Eigenschaft ist

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \forall a, b \in A : \lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b).$$

Die Eins wird mit e bezeichnet.

(b) Eine *normierte Algebra* ist eine $\mathbb{C}$-Algebra mit einer Norm mit den folgenden Eigenschaften

(i) $\forall a, b \in A : \|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ (Submultiplikativität).

(ii) $\|e\| = 1$.

(c) Eine *Banachalgebra* ist eine vollständige normierte Algebra.

10.2 Bemerkung. Sei A eine normierte Algebra. Dann ist die Multiplikation stetig.

10.3 Beispiel. (a) Sei E ein komplexer Banachraum. Dann ist $L(E)$ eine Banachalgebra. Im Fall $E = \mathbb{C}^N$ wurde sie in der Linearen Algebra studiert.

(b) Wenn K kompakt ist, dann ist $C(K)$ (komplexwertig) eine Banachalgebra.

10.4 Bezeichnung. Die Gruppe der invertierbaren Elemente in A wird mit $\mathcal{G}(A)$ bezeichnet. (In der Algebra würde man A^* schreiben.)

10.5 Satz (Neumannsche Reihe). *Es seien A eine Banachalgebra und $a \in \mathcal{G}(A)$. Falls für $b \in A$ gilt*

$$\|a - b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|},$$

dann $b \in \mathcal{G}(A)$.

10.6 Korollar. *$\mathcal{G}(A)$ ist offen und die Umkehrabbildung $x \mapsto x^{-1}$ ist stetig in $\mathcal{G}(A)$.*

10.7 Definition. Es sei A eine Banachalgebra und es sei $a \in A$. Das *Spektrum* von a besteht aus allen $\lambda \in \mathbb{C}$, für welche $\lambda e - a \notin \mathcal{G}(A)$. Es wird mit $\sigma(a)$ bezeichnet. Sein Komplement $\rho(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ ist die *Resolventenmenge* von a.

Für $\lambda \in \rho(A)$ ist $R(\lambda, a) = (\lambda e - a)^{-1}$ die *Resolvente.*

10.8 Bemerkung. $\sigma(a)$ ist abgeschlossen. Für λ mit $|\lambda| > \|a\|$ ist $\lambda^{-1}a$ invertierbar. Also $\sigma(a) \subset \overline{B}_{\|a\|}(0)$. Insbesondere ist $\sigma(a)$ kompakt. Aus dem Beweis der Neumannschen Reihe erhält man sofort

$$R(\lambda, a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{\lambda^{j+1}}.$$

10.9 Lemma. *Seien* A *eine Banachalgebra,* $a \in A$ *und* $z, \zeta \in \rho(a)$*. Dann gelten*

(a) $R(z, a) - R(\zeta, a) = (\zeta - z)R(z, a)R(\zeta, a)$ *(Resolventenformel).*

(b) $\displaystyle\lim_{\zeta \to z} \frac{1}{z - \zeta}(R(z, a) - R(\zeta, a)) = -R(z, a)^2.$

10.10 Satz. *Sei* A *eine Banachalgebra. Für jedes* $a \in A$ *ist* $\sigma(a) \neq \emptyset$*.*

10.11 Theorem (Satz von Gelfand und Mazur). *Wenn die Banachalgebra* A *ein Körper ist, dann ist sie gleich* $\mathbb{C}e$*.*

10.12 Lemma. *Seien* A *eine Banachalgebra und* $a \in A$*. Für ein komplexes Polynom* $p = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j z^j \in \mathbb{C}[X]$ *definieren wir* $p(a) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j a^j \in A$*. Dann* $p(a) \in \mathcal{G}(A)$ *genau dann, wenn* $p(\mu) \neq 0$ *für alle* $\mu \in \sigma(a)$*.*

10.13 Satz. *Seien* A *eine Banachalgebra,* $a \in A$ *und* $p \in \mathbb{C}[X]$*. Dann* $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$*.*

10.14 Beispiel. Wenn $M \in \mathbb{C}^{N \times N}$ diagonalisierbar ist, dann existieren Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_N \in \mathbb{C}$ und eine Transformationsmatrix $T \in GL_N(\mathbb{C})$, so dass

$$M = T \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_N \end{pmatrix} T^{-1}.$$

(a) Dann

$$p(M) = T \begin{pmatrix} p(\mu_1) & & & \\ & p(\mu_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(\mu_N) \end{pmatrix} T^{-1}.$$

(b) Die Möglichkeit, $p(M)$ über die Eigenwerte zu erklären, besteht auch für allgemeine stetige Funktionen, z. B. $\sqrt{M} = TDT^{-1}$ für

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & & & \\ & \sqrt{\mu_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\mu_N} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt in der Tat $\sqrt{M}^2 = TDT^{-1}TDT^{-1} = TD^2T^{-1} = M$.

10.15 Definition. Sei A eine Banachalgebra. Für $a \in A$ definiert man den *Spektralradius* als

$$r(a) = \sup\{|z| \mid z \in \sigma(a)\}.$$

10.16 Satz. *Sei A eine Banachalgebra. Für $a \in A$ gilt*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}.$$

Der Beweis benutzt Satz 9.18 der Einführung in die Funktionalanalysis:

10.17 Satz. *Seien E ein normierter Raum und M eine Teilmenge von E, so dass $\sup_{x\in M}|\langle y, x\rangle| < \infty$ für jedes $y \in E'$. Dann $\sup_{x\in M}\|x\| < \infty$.*

10.18 Definition. (a) Seien A, B Algebren. Eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f\colon A \to B$ ist ein *Algebrenhomomorphismus*, wenn $f(e) = e$ und $f(ab) = f(a)f(b)$ für alle $a, b \in A$.

(b) Sei A eine Banachalgebra. Das *Spektrum* von A besteht aus allen stetigen Algebrenhomomorphismen von A nach $\mathbb{C}$. Man schreibt $\mathrm{Sp}(A)$.

10.19 Lemma (Meise/Vogt, Lemma 17.12). *Sei A eine kommutative Banachalgebra. Die maximalen Ideale in A sind genau die Kerne der Elemente von $\mathrm{Sp}(A)$.*

10.20 Satz (Meise/Vogt, Satz 17.13). *Sei A eine kommutative Banachalgebra und sei $a \in A$. Dann $\sigma(a) = \{\varphi(a) \mid \varphi \in \mathrm{Sp}(A)\}$.*

10.21 Definition. Eine C^*-Algebra ist eine Banachalgebra zusammen mit einer Involution $*\colon a \mapsto a^*$ mit den folgenden Eigenschaften

(a) $(a + b)^* = a^* + b^*$, $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a$ und $(ab)^* = b^* a^*$ für $a, b \in A$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) $\|a^* a\| = \|a\|^2$ für alle $a \in A$.

Eine Involution ist ein Element mit der Eigenschaft $a^2 = e$.

10.22 Lemma. *Sei A eine C^*-Algebra. Dann gelten*

(a) $\|a^*\| = \|a\|$ für alle $a \in A$.

(b) $e^* = e$.

(c) Wenn $a \in \mathcal{G}(A)$, dann $a^* \in \mathcal{G}(A)$ und $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.

10.23 Beispiel. (a) $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ mit der Involution $z \mapsto \overline{z}$ ist eine C^*-Algebra.

(b) Für ein Kompaktum K ist $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ mit der Involution $f \mapsto \overline{f}$ eine C^*-Algebra.

(c) Sei H ein komplexer Hilbertraum. Dann hatten wir den zu $A \in L(H)$ adjungierten Operator $A^* \in L(H)$ definiert durch

$$(A^*x, y) = (x, Ay), \quad x, y \in H.$$

Mit dieser Setzung wird $L(H)$ zu einer C^*-Algebra.

(d) Ein Spezialfall von (c) ist der Fall $H = \mathbb{C}^N$. Der Operator $A \in L(H)$ sei im Standardkoordinatensystem durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,N} \end{pmatrix}$$

dargestellt. Dann besitzt A^* die Darstellung

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_{1,1} & \overline{a}_{2,1} & \dots & \overline{a}_{N,1} \\ \overline{a}_{1,2} & \overline{a}_{2,2} & \dots & \overline{a}_{N,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{1,N} & \overline{a}_{2,N} & \dots & \overline{a}_{N,N} \end{pmatrix}.$$

10.24 Definition. Ein Element a einer C^*-Algebra A heißt

(a) *normal*, wenn $aa^* = a^*a$,

(b) *selbstadjungiert*, wenn $a^* = a$,

(c) *unitär*, wenn $aa^* = a^*a = e$.

10.25 Bemerkung. (a) Selbstadjungierte und unitäre Elemente sind normal.

(b) Im endlich-dimensionalen Fall ist ein Operator genau dann selbstadjungiert, wenn seine Matrix hermitesch ist.

(c) Im endlich-dimensionalen Fall wurde in der Linearen Algebra gezeigt, dass ein $\mathbb{C}$-linearer Endomorphismus genau dann eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren hat, wenn er normal ist. Ein normaler Operator besitzt genau dann reelle Eigenwerte, wenn er selbstadjungiert ist.

(d) Für jedes a ist a^*a selbstadjungiert.

10.26 Satz. *Sei A eine C^*-Algebra und sei $a \in A$. Dann $\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)}$.*

10.27 Satz. *Sei A eine C^*-Algebra und sei $a \in A$ selbstadjungiert. Dann $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*

10.28 Satz. *Sei A eine C^*-Algebra und sei $a \in A$ selbstadjungiert. Dann $r(a) = \|a\|$.*

10.29 Beispiel. Sei $M \subset \mathbb{C}^{N\times N}$ eine hermitesche Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_N$. Der $\mathbb{C}^N$ sei mit der euklidischen Norm versehen. Dann ist die Operatornorm des zu M gehörenden Endomorphismus gleich $\max\{-\lambda_1, \lambda_N\}$.

10.30 Lemma. *Sei A eine C^*-Algebra, sei $a \in A$ selbstadjungiert und sei $p \in \mathbb{C}[X]$. Dann $r(p(a)) = \|p(a)\|$.*

Erinnerung an zwei frühere Sätze. Der Satz von Stone-Weierstraß war Theorem 5.30 in der Einführung in die Funktionalanalysis im Sommer 2014.

10.31 Satz. *Sei E ein normierter Raum, sei H ein Banachraum, sei $F \subset E$ ein dichter Unterraum (d. h. $\overline{F} = E$) und sei $A \in L(F, H)$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $B \in L(E, H)$ mit $B|_F = A$.*

Es gilt ferner $\|B\| = \|A\|$.

10.32 Theorem (Satz von Stone-Weierstraß). *Seien X ein kompakter topologischer Raum und A eine abgeschlossene Unteralgebra von $C(X, \mathbb{C})$ mit den folgenden Eigenschaften*

(a) A trennt die Punkte von X,

(b) mit f liegt auch $\overline{f}$ in A.

Dann $A = C(X, \mathbb{C})$.

10.33 Definition. Seien A und B C^*-Algebren. Ein stetiger Algebrenhomomorphismus $\Phi\colon A \to B$ ist ein $*$-Homomorphismus, wenn $\Phi(a^*) = \Phi(a)^*$ für alle $a \in A$.

10.34 Satz. *Sei A eine C^*-Algebra, sei $a \in A$ selbstadjungiert. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten $*$-Homomorphismus $\Phi\colon C(\sigma(a)) \to A$ mit $\Phi(x) = a$. (Mit x meinen wir die identische Funktion von $\sigma(a)$.)*

Für dieses Φ gilt $\|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty$ für alle $f \in C(\sigma(a))$.

Wenn $b \in A$ ein Element mit $ab = ba$ ist, dann $\Phi(f)b = b\Phi(f)$ für alle $f \in C(\sigma(a))$.

10.35 Theorem (Spektralabbildungssatz). *Sei A eine C^*-Algebra und sei $a \in A$ selbstadjungiert. Dann gilt für den $*$-Homomorphismus Φ aus Satz 10.34*

$$\sigma(\Phi(f)) = f(\sigma(a)) \quad \textit{für jedes } f \in C(\sigma(a)).$$

10.36 Beispiel. Sei $a \in A$ selbstadjungiert. Dann existiert ein normales $b \in A$ mit $b^2 = a$. Wenn $\sigma(a) \subset [0, \infty)$, dann kann b sogar selbstadjungiert gewählt werden.

In Meise/Vogt wird der Spektralabbildungssatz sogar für normale Elemente a gezeigt.

10.37 Theorem (Meise/Vogt, 17.21 und 17.22). *Sei* A *eine* C^**-Algebra, sei* $a \in A$ *normal. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten* $*$*-Homomorphismus* $\Phi\colon C(\sigma(a)) \to A$ *mit* $\Phi(z) = a$.

Für dieses Φ *gelten* $\|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty$ *und* $\sigma(\Phi(f)) = f(\sigma(a))$ *für alle* $f \in C(\sigma(a))$.

10.38 Satz. *Sei* A *eine Banachalgebra und sei* $a \in A$ *normal. Dann ist* a *genau dann unitär, wenn* $\sigma(a) \subset S^1$.

10.39 Korollar (Stetiger Funktionalkalkül). *Sei* H *ein komplexer Hilbertraum und sei* $T \in L(H)$ *selbstadjungiert. Dann existiert genau eine Abbildung* $\Phi\colon C(\sigma(T)) \to L(H)$ *mit*

(a) $\Phi(x) = T$ *und* $\Phi(1) = \mathrm{id}_H$.

(b) Φ *ist* $\mathbb{C}$*-linear.*

(c) Φ *ist multiplikativ. (D. h.* $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ *für alle* $f, g \in C(\sigma(T))$.*)*

(d) Φ *respektiert die Involutionen, d. h.* $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$ *für alle* $f \in C(\sigma(T))$.

(e) Φ *ist stetig.*

Wir schreiben $f(T)$ *statt* $\Phi(f)$. *Dann gelten* $\|f(T)\| = \sup_{x\in\sigma(T)}|f(x)|$ *und* $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ *für alle* $f \in C(\sigma(T))$.

10.40 Definition. Sei E ein normierter Raum und sei $T \in L(E)$. Eine komplexe Zahl λ heißt *Eigenwert* von T, wenn $\{0\} \neq \ker(\lambda \,\mathrm{id} - T)$. Die von 0 verschiedenen Elemente von $\ker(\lambda \,\mathrm{id} - T)$ heißen *Eigenvektoren.*

10.41 Satz. *Sei* H *ein komplexer Hilbertraum, sei* $T \in L(H)$ *selbstadjungiert. Wenn* $\lambda \in \sigma(T)$ *ein isolierter Punkt ist, dann ist* λ *ein Eigenwert von* T.

10.42 Bezeichnung. Für eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $B(K)$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum der beschränkten, Borel-messbaren Funktionen auf K. Er wird versehen mit der Supremumsnorm.

Meise und Vogt bezeichnen diesen Raum mit $\mathcal{M}_\infty(K)$.

10.43 Theorem (Messbarer Funktionalkalkül, Werner, Satz VII.1.6). *Sei* H *ein komplexer Hilbertraum und sei* $T \in L(H)$ *selbstadjungiert. Dann gibt es genau eine Abbildung* $\Phi\colon B(\sigma(T)) \to L(H)$ *mit den folgenden Eigenschaften*

(a) $\Phi(x) = T$ *und* $\Phi(1) = \mathrm{id}$.

(b) Φ *ist ein* $*$*-Homomorphismus.*

(c) Wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine beschränkte Folge in* $B(\sigma(T))$ *ist, so dass* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *für alle* $x \in \sigma(T)$, *dann* $\lim_{n\to\infty}(\Phi(f_n)v, w) = (\Phi(f)v, w)$ *für alle* $v, w \in H$.

10.44 Satz. *Sei* H *ein komplexer Hilbertraum, sei* $T \in L(H)$ *selbstadjungiert und sei* $\lambda \in \sigma(T)$. *Dann gibt es eine Folge* $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *in* H *mit* $\|v_n\| = 1$ *für alle* n, *so dass* $\lim_{n\to\infty} \lambda v_n - Tv_n = 0$.

Es ist auch möglich, den messbaren Funktionalkalkül auf normale Operatoren auszudehnen.

11 Unbeschränkte Operatoren zwischen Hilberträumen

Ab jetzt schreiben wir das Skalarprodukt als $\langle x, y\rangle$, um es vom Paar (x, y) zu unterscheiden.

11.1 Lemma. *Seien* H *und* G *zwei Hilberträume. Das Produkt* $H \times G$ *wird durch*

$$\langle (x, y), (s, t)\rangle = \langle x, s\rangle + \langle x, t\rangle\,, \quad x, s \in H, y, t \in G,$$

zu einem Hilbertraum.

11.2 Definition. Ein *Operator* A von H nach G ist eine lineare Abbildung A von einem Unterraum $D(A)$ von H mit Werten in G. $D(A)$ ist der *Definitionsbereich* von A, $R(A) = \{Ax \mid x \in D(A)\}$ ist sein *Bild*. Der Prähilbertraum $\mathcal{G}(A) = \{(x, Ax) \mid x \in D(A)\}$ ist der *Graph* von A.

Der Operator A ist *dicht definiert*, wenn sein Definitionsbereich dicht ist.

Sind A und B zwei Operatoren von H nach G und gilt $\mathcal{G}(A) \subset \mathcal{G}(B)$, so bezeichnet man B als *Erweiterung* von A und A als *Einschränkung* von B.

11.3 Beispiel. Sei $D(A) \subset L^2[0, 1]$ der Raum aller Polynome und sei $A\colon D(A) \to L^2[0, 1]$ die Ableitung. Dann ist A ein dicht definierter Operator.

11.4 Lemma. *Ein Unterraum* L *von* $H \times G$ *ist genau dann der Graph eines Operators von* H *nach* G, *wenn* $\{(x, y) \in L \mid x = 0\} = \{(0, 0)\}$.

Das folgende Ergebnis war Satz 4.16 der Einführung in die Funktionalanalysis.

11.5 Theorem (Rieszscher Darstellungssatz für Linearformen auf Hilberträumen). *Seien* E *ein Hilbertraum und* $y \in E'$. *Dann existiert ein eindeutig bestimmtes* $\eta \in E$ *mit*

$$y(x) = \langle x, \eta\rangle \quad \textit{für alle } x \in E.$$

Für dieses η *gilt* $\|\eta\| = \|y\|$.

11.6 Lemma. *Sei* A *ein dicht definierter Operator von* H *nach* G. *Dann definieren wir* $D(A^*) = \{y \in G \mid x \mapsto \langle Ax, y\rangle$ *ist stetig auf* $D(A)\}$. *Es gelten*

(a) $D(A^*)$ *ist ein linearer Unterraum von* G.

(b) Für jedes $y \in D(A^*)$ *gibt es ein eindeutig bestimmtes* $A^*y \in H$ *mit*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \quad \textit{für alle } x \in D(A).$$

(c) $A^*\colon D(A^*) \to H$ *ist linear.*

11.7 Definition. Sei A ein dicht definierter Operator von H nach G. Den Operator A^* aus 11.6 bezeichnet man als den zu A *adjungierten* Operator.

11.8 Beispiel. Für den Operator A aus Beispiel 11.3 gilt $x \notin D(A^*)$.

11.9 Bezeichnung. Definiere $U\colon H \times G \to G \times H$, $U(x, y) = (-y, x)$. Dann ist U offenbar ein unitärer Isomorphismus.

11.10 Lemma. *Sei* A *ein dicht definierter Operator von* H *nach* G*. Dann*

$$\mathcal{G}(A^*) = U(\mathcal{G}(A)^{\perp}) = (U\mathcal{G}(A))^{\perp}. \tag{11.1}$$

11.11 Bemerkung. Falls A und B dicht definierte Operatoren mit $A \subset B$ sind, so folgt sofort aus dem vorangegangenen Lemma, dass $B^* \subset A^*$.

11.12 Definition. Ein Operator A von H nach G heißt *abgeschlossen*, wenn sein Graph abgeschlossen ist. Er heißt *abschließbar*, wenn $\overline{\mathcal{G}(A)}$ Graph eines Operators B ist. In diesem Fall ist B die *Abschließung* von A. Wir schreiben dann $\overline{A}$.

Bemerkung. Wenn A abgeschlossen mit $D(A) = H$ ist, dann ist A stetig. Das folgt aus dem Satz von abgeschlossenen Graphen.

11.13 Bemerkungen. Sei A ein Operator von H nach G.

(a) A ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D(A)$, die gegen ein $x \in H$ konvergiert und für die $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $y \in G$ konvergiert, bereits $x \in D(A)$ und $Ax = y$ gelten.

(b) A ist genau dann abschließbar, wenn für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für welche $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $y \in G$ konvergiert, bereits $y = 0$ gilt.

11.14 Lemma. *Sei* A *ein Operator von* H *nach* G*. Wenn* A *abschließbar und dicht definiert ist, dann gilt* $\overline{A}^* = A^*$.

12 Soboleväume

12.1 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex und sei $f \in L^2(\Omega)$. Dann heißt $g \in L^2(\Omega)$ *schwache Ableitung* von f, wenn

$$\langle g, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle f, \varphi^{(\alpha)} \right\rangle \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Wir schreiben dann $D^\alpha f$ oder $f^{(\alpha)}$ für g.

12.2 Bemerkung. (a) Sei $\Omega = (-1, 1)$, sei $f(x) = |x|$. Dann ist g mit $g(x) = \operatorname{signum}(x)$ die schwache Ableitung von f. Das rechnet man sofort nach, indem man die Integrale $\int_{-1}^{0}$ und $\int_{0}^{1}$ einzeln partiell integriert.

(b) Sei $h \in C^\infty[a, b]$ und sei $f \in L^2[a, b]$ derart, dass die schwache Ableitung $g = f'$ von f existiert. Dann $hf \in L^2[a, b]$ und $(hf)' = h'f + hg$ im schwachen Sinn.

12.3 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $m \in \mathbb{N}_0$.

(a) $H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid$ für alle α mit $|\alpha| \leq m$ existiert die schwache Ableitung $D^\alpha f$ in $L^2(\Omega)\}$.

(b) $\langle f, g \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle$ für $f, g \in H^m(\Omega)$.

(c) $H_0^m(\Omega)$ ist der Abschluß von $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H^m(\Omega)$.

Die Räume $H^m(\Omega)$ und $H_0^m(\Omega)$ heißen *Soboleväume*.

Ich zitiere einige Sätze aus der Einführung in die Funktionalanalysis.

12.4 Satz (Einf. Satz 12.4). *$H^m(\Omega)$ und $H_0^m(\Omega)$ sind Hilberträume.*

12.5 Satz. *Sei $f \in L^2[a, b]$. Dann wird durch $F(x) = \int_a^x f \, d\lambda_1$ ein $F \in H^1[a, b]$ gegeben, dessen schwache Ableitung gleich f ist.*

Das soll in der Übung gezeigt werden.

12.6 Theorem (Sobolev-Lemma, Einf. Theorem 17.1). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $m, k \in \mathbb{N}_0$ mit $m > k + \frac{n}{2}$. Zu jedem $f \in H^m(\Omega)$ existiert ein Repräsentant in $C^k(\Omega)$.*

12.7 Theorem (Einf. pDgl. Theorem 13.10). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit C^∞-Rand. Dann existiert eine stetige lineare Abbildung $T \colon H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ mit $T(f) = f_{\partial\Omega}$ für jedes $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

Sie Abbildung T heißt *Spurabbildung.*

12.8 Theorem (Einf. pDgl. Theorem 13.12). *Sei* $T\colon H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ *die Spurabbildung. Dann* $H_0^1(\Omega) = \ker T$.

12.9 Beispiel. $H^1[a,b] \subset C[a,b]$ und $H_0^1[a,b] = \{f \in H^1[a,b] \mid f(a) = f(b) = 0\}$. Durch nochmalige Anwendung erhält man beispielsweise, dass $H^2[a,b] \subset C^1[a,b]$ und $H_0^2[a,b] = \{f \in H^2[a,b] \mid f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0\}$.

12.10 Theorem (Rellichscher Einbettungssatz, Einf. FA Theorem 17.3). *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt und offen und sei* $m \in \mathbb{N}$. *Dann ist die Einbettung* $H_0(\Omega) \to H_0^{m-1}(\Omega)$ *kompakt.*

12.11 Theorem (Einf. FA Korollar 17.15). *Wenn* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *eine beschränkte, offene Menge mit* C^∞*-Rand ist, dann ist die Einbettung* $H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ *kompakt.*

13 Unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren

13.1 Satz. *Sei* A *ein dicht definierter Operator von* H *nach* G*. Dann gelten*

(a) A^* *ist abgeschlossen mit* $\ker A^* = (\operatorname{Bild} A)^\perp$*.*

(b) A^* *ist genau dann dicht definiert, wenn* A *abschließbar ist.*

(c) Wenn A *abschließbar ist, dann* $\overline{A} = A^{**}$*.*

13.2 Korollar. *Wenn* A *ein dicht definierter, abgeschlossener Operator von* H *nach* G *ist, so ist* A^* *abgeschlossen und dicht definiert, und es gilt* $A = A^{**}$*.*

13.3 Satz. *Sei* E *ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums* H*. Dann existiert* $P \in L(H)$ *mit*

(a) $P(x) \in E$ *und* $x - P(x) \in E^\perp$ *für alle* $x \in E$*,*

(b) $P \circ P = P$*.*

Dieses P heißt *orthogonale Projektion* auf E.

13.4 Satz. $f \in H^1[a,b]$ *besitze die schwache Ableitung* 0*. Dann besitzt* f *einen konstanten Repräsentanten.*

Ein großer Teil der Theorie beschäftigt sich damit, wie man die explizite Bestimmung des transponierten Operators A^* vermeiden kann. Für einige Operatoren wollen wir das aber doch tun.

13.5 Beispiel. Betrachte $Af = if'$ mit $D(A) = C^\infty[a,b]$ und $Bg = ig'$ mit $D(B) = H_0^1[a,b]$. Dann gelten:

(a) $A^* = B$.

(b) $D(B^*) = H^1[a,b]$ und $B^*g = ig'$ für alle $g \in D(B^*)$.

(c) A ist abschließbar mit $D(\overline{A}) = H^1[a,b]$.

13.6 Definition. Ein dicht definierter Operator A in einem Hilbertraum H heißt *symmetrisch*, wenn $A \subset A^*$. Er *selbstadjungiert*, wenn $A = A^*$. Ein symmetrischer Operator A heißt *wesentlich selbstadjungiert*, wenn $\overline{A}$ selbstadjungiert ist.

13.7 Lemma. *Sei* A *ein symmetrischer Operator in* H. *Dann ist* A *abschließbar, und* $\overline{A}$ *ist symmetrisch.*

13.8 Bemerkung. (a) Der Operator B aus Beispiel 13.5 ist symmetrisch, die Operatoren A und B^* aus diesem Beispiel aber nicht.

(b) Sei A ein dicht definierter, symmetrischer Operator. Dann gilt für $x, y \in D(A)$

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle.$$

Insbesondere ist $\langle Ax, x\rangle$ reell für jedes $x \in D(A)$.

13.9 Definition. Es sei A ein injektiver Operator von H nach G. Dann wird durch

$$\mathcal{G}(A^{-1}) = \{(Ax, x) \mid x \in D(A)\}$$

ein Operator mit Definitionsbereich $D(A^{-1}) = \operatorname{Bild} A$ erklärt. A^{-1} ist der *Inverse* zu A.

Offenbar ist A^{-1} genau dann abgeschlossen, wenn A abgeschlossen ist.

13.10 Lemma. *Sei* A *ein injektiver, dicht definierter Operator von* H *nach* G, *dessen Bild dicht in* G *ist. Dann ist* A^* *injektiv,* A^{-1} *ist dicht definiert, und es gilt* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

13.11 Definition. Für Operatoren A, B von H nach G definieren wir $A + B$ auf $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$ durch $(A + B)(x) = Ax + Bx$.

13.12 Lemma. A *und* B *seien Operatoren von* H *nach* G. *Dann gelten:*

(a) Falls A *abgeschlossen und* B *beschränkt ist, so ist* $A + B$ *abgeschlossen.*

(b) Falls $A + B$ *dicht definiert ist, so gilt* $A^* + B^* \subset (A + B)^*$.

(c) Falls A *dicht definiert und* B *beschränkt ist, so gilt* $A^* + B^* = (A + B)^*$.

13.13 Definition. Sei A ein Operator von H nach G, und sei B ein Operator von G nach F. Mit BA wird der Operator bezeichnet, der auf $D(BA) = \{x \in D(A) \mid Ax \in D(B)\}$ definiert ist durch $(BA)x = B(Ax)$.

13.14 Lemma. *Sei* A *ein dicht definierter Operator von* H *nach* G, *und sei* B *in dicht definierter Operator von* G *nach* F. *Dann gelten*

(a) $A^*B^* \subset (BA)^*$, *falls* BA *dicht definiert ist.*

(b) Falls B *stetig, so ist* BA *dicht definiert, und es gilt* $A^*B^* = (BA)^*$.

13.15 Lemma. *Sei* A *ein symmetrischer, abgeschlossener Operator in* H. *Für jedes* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *ist* $z\,\mathrm{id} - A$ *injektiv und* $\operatorname{Bild}(z\,\mathrm{id} - A)$ *abgeschlossen.*

13.16 Definition. Sei A ein Operator in H. Die *Resolventenmenge* $\rho(A)$ besteht aus denjenigen $z \in \mathbb{C}$, für die $z\,\mathrm{id} - A$ injektiv ist mit $\mathrm{Bild}(z\,\mathrm{id} - A) = H$. Die Menge $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ heißt *Spektrum* von A. Für $z \in \rho(A)$ bezeichnet man $R(z, A) = (\mathrm{id}\, z - A)^{-1}$ als *Resolvente* von A in z.

13.17 Bemerkung. Falls A abgeschlossen ist, so gilt $R(z, A) \in L(H)$ für $z \in \rho(A)$.

13.18 Satz. *Der Operator A sei selbstadjungiert in H. Dann ist sein Spektrum eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.*

13.19 Beispiel. Für $\lambda \in S^1$ seien $D(A) = \{f \in H^1[0, 1] \mid f(1) = \lambda f(0)\}$ und $Af = if'$. Wir bestimmen $\sigma(A)$.

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $x\,\mathrm{id} - A$ injektiv? Starke Lösungen f von $xf - if' = 0$ haben die Form $f(t) = Ce^{-itx}$. Als Übungsaufgabe wird gezeigt, dass es keine weiteren schwachen Lösungen gibt. Für dieses f gilt

$$\frac{f(1)}{f(0)} = e^{-ix}.$$

$\lambda \in S^1$ ist von der Form $e^{i\theta}$. Daher ist $x\,\mathrm{id} - A$ genau dann injektiv, wenn $x \neq -\theta + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Bisher haben wir gezeigt, dass $2\pi\mathbb{Z} - \theta \subset \sigma(A)$.

Um zu zeigen, dass $\sigma(A) \subset 2\pi\mathbb{Z} - \theta$, fixieren wir $x \notin 2\pi\mathbb{Z} - \theta$ und zeigen zunächst $C[0, 1] \subset \mathrm{Bild}(x\,\mathrm{id} - A)$. Für beliebiges $g \in C[0, 1]$ lösen wir die Differentialgleichung $xf - if' = g$ durch Variation der Konstanten. Die Lösungen sind von der Form

$$f(t) = \left(C + i\int_0^t g(s)e^{isz}ds\right)e^{-itz}.$$

Hat man nun ein beliebiges $h \in L^2[0, 1]$ vorgegeben, so wählt man eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C[0, 1]$, die in $L^2[0, 1]$ gegen h konvergiert, und setzt für ein festes, später zu bestimmendes C

$$f_n(t) = \left(C + i\int_0^t g_n(s)e^{isz}ds\right)e^{-itz}.$$

Aus dem Lebesgueschen Grenzwertsatz folgt die Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2[0, 1]$ gegen

$$f(t) = \left(C + i\int_0^t h(s)e^{isz}ds\right)e^{-itz}.$$

Außerdem gilt $f_n' = -iAf_n = ig_n - ixf_n \to ih - ixf$ in $L^2[0, 1]$. Daher ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $H^1[0, 1]$, deren Grenzwert f die Gleichung $Af = xf - h$ erfüllt.

Im Fall $\int_0^1 h(s)e^{isz}ds = 0$ wählen wir $C = 0$ und erhalten $f(1) = f(0) = 0$, also $f \in D(A)$. Im Fall $\int_0^1 h(s)e^{isz}ds \neq 0$ gilt

$$\frac{f(1)}{f(0)} = \left(1 + \frac{i}{C}\int_0^1 h(s)e^{izs}ds\right)e^{-iz}.$$

Wegen $e^{-iz} \neq \lambda$ existiert $C \neq 0$ mit $\frac{f(1)}{f(0)} = \lambda$. Also $L^2[0, 1] \subset \mathrm{Bild}(x\,\mathrm{id} - A)$.

13.20 Satz. *Für einen Operator* A *in* H *sind äquivalent:*

(a) A *ist selbstadjungiert.*

(b) A *ist symmetrisch mit* $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

(c) A *ist symmetrisch, und es gibt* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *so dass* $z, \overline{z} \in \rho(A)$.

13.21 Satz. *Wenn* A *ein abgeschlossener Operator ist, dann ist* $\sigma(A)$ *abgeschlossenn*

13.22 Satz. *Sei* A *ein abgeschlossener Operator in* H *mit* $\sigma(A) = \emptyset$. *Dann* $A^{-1} \in L(H)$ *und* $\sigma(A^{-1}) = \{0\}$.

13.23 Satz. *Sei* A *ein selbstadjungierter Operator in* $H \neq \{0\}$. *Dann* $\sigma(A) \neq \emptyset$.

14 Die Cayley-Transformierte

14.1 Definition. Sei A ein symmetrischer, abgeschlossener Operator in H. Nach Lemma 13.15 ist $-i\,\mathrm{id} - A$ injektiv. Der Operator $U = (i\,\mathrm{id} - A)(-i\,\mathrm{id} - A)^{-1}$ mit $D(U) = \mathrm{Bild}(-i\,\mathrm{id} - A)$ heißt *Cayley-Transformierte* von A.

14.2 Beispiel. Sei $A \in L(\mathbb{C}^N)$ selbstadjungiert. Dann existieren eine unitäre Matrix V und $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$, so dass

$$A = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{pmatrix} V^{-1}.$$

Dann

$$U = V \begin{pmatrix} -\frac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1} & & & \\ & -\frac{i-\lambda_2}{i+\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\frac{i-\lambda_N}{i+\lambda_N} \end{pmatrix} V^{-1}.$$

Beachte $-\frac{i-\lambda_j}{i+\lambda_j} \in S^1 \setminus \{1\}$.

14.3 Lemma. *Für jeden abgeschlossenen, symmetrischen Operator A in H ist die Cayley-Transformierte eine Isometrie von* $\mathrm{Bild}(-i\,\mathrm{id} - A)$ *auf* $\mathrm{Bild}(i\,\mathrm{id} - A)$.

14.4 Satz. *Sei A ein selbstadjungierter Operator in H und sei U seine Cayley-Transformierte. Dann gelten*

(a) $U \in L(H)$ *ist unitär und* $\mathrm{id} - U$ *ist injektiv.*

(b) $D(A) = \mathrm{Bild}(\mathrm{id} - U)$ *und* $A = i(\mathrm{id} + U)(\mathrm{id} - U)^{-1}$.

14.5 Lemma. *Sei* $U \in L(H)$ *unitär, und sei* $\mathrm{id} - U$ *injektiv. Dann ist der auf* $D(A) = \mathrm{Bild}(\mathrm{id} - U)$ *definierte Operator* $A = i(\mathrm{id} + U)(\mathrm{id} - U)^{-1}$ *symmetrisch.*

14.6 Satz. *Sei* $U \in L(H)$ *unitär, und sei* $\mathrm{id} - U$ *injektiv. Dann ist der auf* $D(A) = \mathrm{Bild}(\mathrm{id} - U)$ *definierte Operator* $A = i(\mathrm{id} + U)(\mathrm{id} - U)^{-1}$ *selbstadjungiert und seine Cayley-Transformierte ist* U.

15 Positive Elemente in C^*-Algebren

15.1 Definition. Ein selbstadjungiertes Element $a \in A$ einer C^*-Algebra A heißt *positiv*, wenn $\sigma(a) \subset [0, \infty)$. Wir bezeichen den Kegel aller positiven Elemente von A mit A_+ und schreiben $a \leq b$, wenn $b - a \in A_+$ und a, b selbstadjungiert sind.

15.2 Satz. *Es sei A eine C^*-Algebra. Zu jedem $a \in A_+$ und jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $b \in A_+$ mit $b^m = a$.*

15.3 Satz. *Seien A, B zwei C^*-Algebren. Jeder $*$-Homomorphismus $\Psi \colon A \to B$ ist* positiv*, d. h. er bildet A_+ nach B_+ ab.*

15.4 Satz. *Sei H ein Hilbertraum und sei $A \in L(H)$. Dann sind äquivalent*

(a) $A \in L(H)_+$.

(b) Es gibt einen Operator $T \in L(H)$ mit $A = T^*T$.

(c) $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in H$.

Beachte, dass in diesem Teil der Vorlesung alle Hilberträume komplex sind.

15.5 Satz. *Sei A eine C^*-Algebra und $\Psi \colon A \to L(H)$ ein $*$-Homomorphismus. Dann* $\|\psi\| = 1$.

Der Beweis zeigt, dass in der Definition des $*$-Homomorphismus die Forderung der Stetigkeit redundant ist.

16 $*$-Darstellungen normaler, beschränkter Operatoren

Dieser Abschnitt orientiert sich am Aufbaukurs von Kaballo.

16.1 Definition. Es sei A eine C^*-Algebra. Eine $*$-*Darstellung* von A auf einem Hilbertraum H ist ein $*$-Homomorphismus $\Psi\colon A \to L(H)$ mit $\Psi(1) = \mathrm{id}$.

Ein abgeschlossener Unterraum $V \subset H$ heißt Ψ-*invariant*, wenn $\Psi(a)V \subset V$ für alle $a \in A$. In diesem Fall definiert $\Psi_V\colon a \mapsto \Psi(a)|_V$ eine $*$-Darstellung von A auf $L(V)$.

Eine $*$-Darstellung heißt *zyklisch*, falls ein Vektor $\xi \in H$ existiert, so dass

$$\overline{\{\Psi(a)\xi \mid a \in A\}} = H.$$

In diesem Fall ist ξ ein *zyklischer Vektor*.

16.2 Bemerkung. Wenn V Ψ-invariant ist, dann ist auch $V^\perp$ Ψ-invariant.

16.3 Bezeichnung. (a) Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt. Ein stetiges, $\mathbb{C}$-lineares Funktional $T\colon C(K) \to \mathbb{C}$ heißt *positiv*, wenn $T(f) \geq 0$ für alle $f \in C(K)$ mit $f \geq 0$. Dabei ist $f \geq 0$ punktweise zu verstehen.

(b) Ein Borelmaß μ heißt *regulär*, wenn für jede Borelmenge A

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \inf\{\mu(G) \mid G \text{ offen, } A \subset G\},\\ \mu(A) &= \sup\{\mu(L) \mid L \text{ kompakt, } K \subset A\}.\end{aligned}$$

Das Lebesguemaß ist regulär.

16.4 Theorem (Rieszscher Darstellungssatz für positive Funktionale auf $C(K)$, Rudin, *Real and Complex Analysis*, Theorem 2.14). *Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt und sei $T\colon C(K) \to \mathbb{C}$ ein positives, lineares Funktional. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes reguläres Borelmaß μ auf K, so dass*

$$T(f) = \int_K f \, d\mu \qquad \textit{für alle } f \in C(K).$$

16.5 Bemerkung. (a) Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt und sei $\Psi\colon C(K) \to L(H)$ eine $*$-Darstellung. Dann wird für jedes $x \in H$ durch

$$\Psi_x\colon f \mapsto \langle \Psi(f)x, x\rangle$$

ein positives, lineares Funktional erklärt. Wir bezeichnen das zugehörige Borelmaß auf K mit μ_x. Dann gilt also

$$\langle \Psi(f)x, x\rangle = \int_K f\, d\mu_x.$$

Es gilt $\mu(K) = \langle \Psi(1)x, x\rangle = \|x\|^2$.

(b) Für $f \in C(K)$ definieren wir den Multiplikationsoperator $M_f^x\colon L^2(K, \mu_x) \to L^2(K, \mu_x)$ durch $M_f^x(\varphi) = f\varphi$. So erhalten wir eine $*$-Darstellung $\Delta^x\colon C(K) \to L(L^2(K, \mu_x))$ mittels $\Delta(f) = M_f^x$.

(c) $C(K)$ ist dicht im $L^2(K, \mu_x)$. Das wird in Rudin, *Real and Complex Analysis*, Theorem 3.14, gezeigt.

16.6 Satz. *Sei* $x \in H$ *ein zyklischer Vektor einer* $*$*-Darstellung* $\Psi\colon C(K) \to L(H)$. *Dann existiert ein unitärer Operator* $U\colon H \to L^2(K, \mu_x)$ *mit* $U\Psi(f)U^{-1} = \Delta^x(f)$ *für alle* $f \in C(K)$.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "U"] \arrow[d, "\Psi(f)"'] & L^2(K, \mu_x) \arrow[d, "M_f^x = \Delta^x(f)"] \\ H \arrow[r, "U"] & L^2(K, \mu_x) \end{tikzcd}$$

16.7 Definition. Sei I eine Indexmenge. Für $i \in I$ sei H_i ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, - \rangle$. Die ℓ^2*-direkte Summe* der H_i wird gegeben durch

$$\bigoplus_{i\in I}^{\ell^2} H_i = \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} H_i \;\middle|\; \sum_{i\in I} \|x_i\|_i^2 < \infty \right\}.$$

Sie wird versehen mit dem Skalarprodukt $\langle (x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i, y_i\rangle_i$.

16.8 Bemerkung. (a) ${\bigoplus_{i\in I}}^{\ell^2} H_i$ ist ein Hilbertraum.

(b) Wenn die H_i paarweise orthogonale, abgeschlossene Unterräume eines Hilbertraums H sind und der einzige Vektor, der zu allen H_i orthogonal ist, der Nullvektor ist, dann ist ${\bigoplus_{i\in I}}^{\ell^2} H_i$ isometrisch isomorph zu H, und man identifiziert die beiden Räume.

16.9 Satz. *Sei* $\Psi\colon C(K) \to L(H)$ *eine* $*$*-Darstellung. Dann gibt es abgeschlossene, paarweise orthogonale Unterräume* H_i, $i \in I$, *so dass*

(a) ${\bigoplus_{i\in I}}^{\ell^2} H_i = H$,

(b) für jedes i *ist* H_i Ψ*-invariant,*

(c) für jedes i *ist* $\Psi|_{H_i}$ *zyklisch.*

16.10 Theorem. *Sei* $\Psi\colon C(K) \to L(H)$ *eine* $*$*-Darstellung. Dann existieren eine Familie* $(\mu_i)_{i\in I}$ *endlicher, regulärer Borelmaße auf* K *und ein unitärer Operator* $U\colon H \to \bigoplus_{i\in I}^{\ell^2} L^2(K,\mu_i)$ *mit* $U\Psi(f)U^{-1} = \Delta^I(f)$ *für alle* $f \in C(K)$*, wobei*

$$\Delta^I(f)((\varphi_i)_{i\in I}) = (f\varphi_i)_{i\in I}, \qquad f \in C(K),\ (\varphi_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I}^{\ell^2} L^2(K,\mu_i).$$

16.11 Beispiel. Sei $H = \mathbb{C}^N$ und sei

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix} T^{-1}$$

mit $\lambda_1, \lambda_N \in \mathbb{C}$ und einer unitären Matrix T. Sei $\sigma(A) = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$, wobei $n_j = \#\{i \mid \lambda_i = \mu_j\}$. Sei $(\nu_i)_{i=1,\dots,N}$ die durch T gegebene Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Der stetige Funktionalkalkül hat dann die folgende Gestalt

$$\Phi\colon C(\sigma(A)) \to L(\mathbb{C}^N), \quad \Phi(f)w = \sum_{i=1}^N f(\lambda_i)\langle w, \nu_i\rangle \nu_i.$$

ν_i ist ein zyklischer Vektor in $\mathbb{C}\nu_i$. Das zugehörige Maß bestimmt sich aus

$$\langle \Phi(f)\nu_i, \nu_i\rangle = f(\lambda_i) = \int_{\sigma(A)} f \, d\delta_{\lambda_i}.$$

Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^N \arrow[r] \arrow[d, "f(A)"'] & \bigoplus_{i=1}^{N\ \ell^2} L^2(\sigma(A), \delta_{\lambda_i}) \arrow[d, "M_f"] \\
\mathbb{C}^N \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^{N\ \ell^2} L^2(\sigma(A), \delta_{\lambda_i})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[r] \arrow[d, "f(A)"'] & (\lambda_i \mapsto \langle w, \nu_i\rangle \lambda_i)_{i=1,\dots,N} \arrow[d, "M_f"] \\
\sum_{i=1}^N f(\lambda_i)\langle w, \nu_i\rangle \nu_i \arrow[r] & (\lambda_i \mapsto f(\lambda_i)\langle w, \nu_i\rangle \lambda_i)_{i=1,\dots,N}
\end{tikzcd}$$

Wenn die λ_i paarweise verschieden sind, dann $\bigoplus_{i=1}^{N\ \ell^2} L^2(\sigma(A), \delta_{\lambda_i}) \cong L^2(\sigma(A), \mu)$, wobei μ das Zählmaß ist.

In 10.42 hatten wir den Raum $B(K)$ der beschränkten, Borel-messbaren Funktionen eingeführt.

16.12 Satz. *Zu jeder* $*$*-Darstellung* $\Psi\colon C(K) \to L(H)$ *existiert eine eindeutig Fortsetzung* $\widetilde{\Psi}\colon B(K) \to L(H)$*. Für diese Fortsetzung gilt*

$$\left\langle \widetilde{\Psi}(g)x, x \right\rangle = \int_K g \, d\mu_x, \qquad g \in \mathcal{B}_b(K),\ x \in H,$$

wobei $\mu_x = \sum_{i\in I} |\varphi_i|^2 \mu_i$ *für* $(\varphi_i)_{i\in I} = Ux$.

16.13 Bemerkung. Die Spezialisierung auf den stetigen Funktionalkalkül eines normalen Operators $T \in L(H)$ liefert den *beschränkten Borel-Funktionalkalkül* aus Satz 10.43

$$\widetilde{\Psi}_T \colon B(\sigma(T)) \to L(H).$$

17 Der Spektralsatz für unbeschränkte, selbstadjungierte Operatoren

17.1 Definition. Sei μ ein Borelmaß auf einer messbaren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, und sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ Borel-messbar. Wir definieren den *Multiplikationsoperator* M_f in $L^2(\mu)$ durch

$$D(M_f) = \left\{ \varphi \in L^2(\mu) \;\middle|\; \int_\Omega |f\varphi|^2 d\mu < \infty \right\}, \quad M_f\varphi = f\varphi.$$

17.2 Satz. M_f *ist abgeschlossen und dicht definiert mit* $M_f^* = M_{\bar{f}}$.

17.3 Definition. Für eine Borel-messbare Abbildung $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ bezeichnet

$$W_\mu(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \forall \epsilon > 0 : \mu(f^{-1}(B_\epsilon(\lambda))) > 0\}$$

den *wesentlichen Wertebereich* von f. Für eine Familie $(\mu_i)_{i\in I}$ von Maßen setzt man

$$W_{(\mu_i)_i}(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \forall \epsilon > 0 \exists i \in I : \mu_i(f^{-1}(B_\epsilon(\lambda))) > 0\}.$$

17.4 Bemerkung. Der wesentliche Wertebereich ist abgeschlossen.

17.5 Satz. $\sigma(M_f) = W_\mu(f)$.

17.6 Beispiel. Wir hatten in der Übung $\sigma(M_t) = \mathbb{R}$ berechnet, wenn μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ ist.

17.7 Satz. *Wenn* U *die Cayley-Transformierte von* A *und* A *nicht beschränkt ist, dann* $\sigma(U) = \{\frac{i-\mu}{-i-\mu} \mid \mu \in \sigma(A)\} \cup \{1\}$

17.8 Theorem (Spektralsatz). *Sei* A *ein selbstadjungierter Operator in einem Hilbertraum* H. *Dann existieren eine Familie* $(\mu_i)_{i\in I}$ *endlicher, regulärer Borelmaße auf* $\sigma(A)$ *und ein unitärer Operator* $U\colon H \to \bigoplus_{j\in J}^{\ell^2} L^2(\sigma(A), \mu_i)$ *mit* $UAU^{-1} = M_\lambda^J$, *wobei* $M_\lambda^J((\varphi_j)_{j\in J}) = (\lambda\varphi_j)_{j\in J}$. *Hier bezeichnet* λ *wieder die identische Abbildung auf* $\sigma(A)$.

17.9 Beispiel. Durch $D(A) = H^1(\mathbb{R})$, $Af = if'$, wird ein Operator im $L^2(\mathbb{R})$ gegeben. Er ist selbstadjungiert. Das zum Spektralsatz gehörige Diagramm ist

$$\begin{array}{ccc} D(A) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & D(M_\lambda) \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & {\scriptstyle M_\lambda}\downarrow \\ L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(\mathbb{R}), \end{array}$$

denn $\mathcal{F}(f')(\xi) = -i\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$.