Analysis III

Rüdiger W. Braun

Wintersemester 2016/17

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Maß- und Integrationstheorie

1. Quader und Figuren

Ausgangsfragen

(a) Wenn ein Punkt keine Ausdehnung hat, wie kann dann ein Intervall eine positive Länge besitzen, obwohl es aus Punkten besteht?

(b) Eine *Bewegung* ist eine Verknüpfung von Translationen und Rotationen.

Das *Banach-Tarski-Paradoxon* sagt aus: Es gibt endlich viele disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n$ mit $A_1 \cup \dots \cup A_n = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1\}$ und Bewegungen $B_1, \dots, B_n$, so dass $B_1(A_1) \cup \dots \cup B_k(A_k) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1\}$ und $B_{k+1}(A_{k+1}) \cup \dots \cup B_n(A_n) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x - (2, 0, 0)| < 1\}$.

1.1 Bezeichnung. Die *Potenzmenge* einer Menge X wird mit $\mathcal{P}(X)$ bezeichnet.

1.2 Definition. Für $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$ im $\mathbb{R}^n$ definiert man

$$\begin{aligned} a \le b &\iff a_i \le b_i \text{ für } 1 \le i \le n, \\ a < b &\iff a_i < b_i \text{ für } 1 \le i \le n. \end{aligned}$$

Ist $a \le b$, so definiert man $[a, b[\, = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \le x < b\}$. Die Menge $[a, b[$ ist ein halboffener, achsenparalleler *Quader* im $\mathbb{R}^n$. Die Menge aller Quader im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet man mit $\mathcal{Q}^n$.

Für $[a, b[\, \in \mathcal{Q}^n$ ist

$$\lambda^n([a, b[) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

das *Volumen* von $[a, b[$.

Eine Vereinigung von endlich vielen Quadern im $\mathbb{R}^n$ heißt *Figur* in $\mathbb{R}^n$. Es sei $\mathcal{F}^n$ die Menge aller Figuren im $\mathbb{R}^n$.

Wenn in dieser Vorlesung das Wort "Quader" verwendet wird, ist immer ein halboffener, achsenparalleler Quader gemeint.

1.3 Lemma. *Jede Figur ist disjunkte Vereinigung von endlich vielen Quadern.*

1.4 Definition. Seien X eine Menge und $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{R}$ ist ein *Ring von Teilmengen* von X, wenn

(a) $\emptyset \in \mathcal{R}$.

(b) Sind $A, B \in \mathcal{R}$, so ist $A \cup B \in \mathcal{R}$.

(c) Sind $A, B \in \mathcal{R}$, so ist $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

1.5 Satz. *$\mathcal{F}^n$ ist ein Ring von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.*

1.6 Definition. Seien X eine Menge und $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen von X und sei $\mu\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Abbildung.

(a) μ ist ein *Inhalt*, wenn

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$.
- (ii) $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{R}$.
- (iii) (Additivität) Sind $A_1, A_2, \dots A_N \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkt, so gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{m=1}^{N} A_m\Big) = \sum_{m=1}^{N} \mu(A_m).$$

(b) Wenn μ ein Inhalt ist und zusätzlich noch die folgende Eigenschaft (iii′) besitzt, dann ist μ ein *Prämaß.*

- (iii′) (σ-Additivität) Sind $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkt und ist $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{R}$, so gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\Big) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m).$$

Bemerkung. Man beachte, dass aus den Eigenschaften eines Rings nicht folgt, dass $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{R}$.

1.7 Lemma. *Für $n \in \mathbb{N}$ sei*

$$\lambda^n([a, b[) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) \quad \textit{für alle } [a, b[\in \mathcal{Q}^n.$$

Ferner sei $Q \in \mathcal{Q}^n$ disjunkte Vereinigung endlich vieler Quader $P_1, \dots, P_m \in \mathcal{Q}^n$. Dann

$$\lambda^n(Q) = \sum_{j=1}^{m} \lambda^n(P_j).$$

1.8 Lemma. *Für jede disjunkte Vereinigung $F = \bigcup_{m=1}^{N} Q_j$ von Quadern setzen wir $\lambda^n(F) = \sum_{m=1}^{N} \lambda^n(Q_j)$ für das λ^n aus dem vorigen Lemma. Dann ist λ^n ein Inhalt.*

2. σ-Algebren und Maße

2.1 Definition. Es sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist eine *σ-Algebra*, wenn

(a) $\mathcal{A}$ ist ein Ring von Teilmengen von X.

(b) $X \in \mathcal{A}$.

(c) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, dann $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{A}$.

2.2 Lemma. *Der Durchschnitt von beliebig vielen σ-Algebren ist eine σ-Algebra in X.*

2.3 Satz. *Zu jeder Teilmenge $\mathcal{T}$ von $\mathcal{P}(X)$ gibt es eine kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ in X, die $\mathcal{T}$ enthält.*

2.4 Beispiel. Sei X ein metrischer Raum, $\mathcal{T}$ die Menge aller offenen Teilmengen von X. Die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{T}$ umfasst, ist die σ-Algebra der *Borel-Mengen* von X. Sie wird mit $\mathcal{B}(X)$ bezeichnet.

2.5 Definition. Ein Prämaß auf einer σ-Algebra bezeichnet man als *Maß* auf $\mathcal{A}$.

2.6 Definition. (a) Ein Paar $(X, \mathcal{A})$ aus einer Menge X und einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf X bezeichnet man als *Messraum.*

(b) Ein Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ aus einer Menge X, einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf X und einem Maß μ auf $\mathcal{A}$ bezeichnet man als *Maßraum.*

2.7 Bemerkung. Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, und sind $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \subseteq X$ messbar, so ist $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ messbar mit $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

2.8 Definition. Ein *äußeres Maß* auf einer Menge X ist eine Abbildung $\eta\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\eta(\emptyset) = 0$.

(b) Für alle $A \subseteq B \subseteq X$ gilt $\eta(A) \leq \eta(B)$.

(c) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen von X gilt $\eta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n)$.

2.9 Beispiel. Die folgende Abbildung ist ein äußeres Maß

$$\eta(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ 1, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$

2.10 Definition. Es sei $\eta\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein äußeres Maß. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt η-*messbar*, wenn für jedes $Q \subseteq X$ gilt

$$\eta(Q) = \eta(Q \cap A) + \eta(Q \setminus A).$$

2.11 Bemerkung. (a) Jedes A mit $\eta(A) = 0$ oder $\eta(X \setminus A) = 0$ ist η-messbar.

(b) A ist genau dann η-messbar, wenn für jedes Q gilt $\eta(Q) \geq \eta(Q \cap A) + \eta(Q \setminus A)$.

(c) A ist genau dann η-messbar, wenn für jedes Q mit $\eta(Q) < \infty$ gilt $\eta(Q) \geq \eta(Q \cap A) + \eta(Q \setminus A)$.

2.12 Satz (Carathéodory 1914). *Ist $\eta\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein äußeres Maß, so ist*

$$\mathcal{A}_\eta = \{A \subseteq X \mid \ A \textit{ ist } \eta\textit{-messbar}\}$$

eine σ-Algebra, und die Einschränkung von η auf $\mathcal{A}_\eta$ ist ein Maß.

2.13 Satz. *Seien X eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen von X und μ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$. Für beliebiges $A \subseteq X$ setze*

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_k) \;\Big|\; \forall k \in \mathbb{N} : B_k \in \mathcal{R},\, A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big\}$$

(dabei $\inf \emptyset = \infty$). Dann ist μ^* ein äußeres Maß auf X und alle $A \in \mathcal{R}$ sind μ^*-messbar.

2.14 Theorem (Maßfortsetzungssatz von Carathéodory). *Seien X eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen von X und μ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$. Dann kann μ zu einem Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}_{\mu^*}$ fortgesetzt werden.*

2.15 Definition. Ein Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$ von Teilmengen von X heißt σ-endlich, wenn es eine Folge $E_1, E_2, \ldots$ in $\mathcal{R}$ gibt, so dass

(a) $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$

(b) $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$.

(c) $\mu(E_m) < \infty$ für alle m.

2.16 Satz (Eindeutigkeitssatz). *Es sei $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen von X und es sei μ ein σ-endliches Prämaß auf $\mathcal{R}$. Der im Maßfortsetzungssatz konstruierte Maßraum werde mit $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu^*)$ bezeichnet. Die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{R}$ umfasst, werde mit $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ bezeichnet. Wenn ν ein Maß auf $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ ist, so dass $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$, dann gilt $\nu(A) = \mu^*(A)$ für alle $A \in A(\mathcal{R})$.*

Bevor ich im übernächsten Abschnitt das Lebesgue-Maß einführe, erwähne ich zwei Maße, die man ohne den Fortsetzungssatz bekommt.

2.17 Beispiel. (a) Sei X eine beliebige Menge. Für jede Teilmenge M von X sei $\mu(M)$ die Anzahl der Elemente von M. Dann ist $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ ein Maßraum. Das Maß μ ist das *Zählmaß* auf X.

(b) Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei

$$\delta_a(M) = \begin{cases} 1, & a \in M, \\ 0, & a \notin M. \end{cases}$$

Dann ist $(\mathbb{R}^n, \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \delta_a)$ ein Maßraum. Das Maß δ_a bezeichnet man als *Dirac-Maß*.

3. Kompakte Mengen

Wir hatten eine Teilmenge K eines metrischen Raums X als *kompakt* bezeichnet, wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K hat.

3.1 Definition. Ein System $(U_j)_{j \in J}$ von offenen Teilmengen von X ist eine *offene Überdeckung* von K, wenn $K \subset \bigcup_{j \in J} U_j$.

Eine Menge K hat die *endliche Überdeckungseigenschaft*, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

3.2 Definition. Sei K eine Teilmenge eines metrischen Raums X. Für $j \in J$ sei $a_j \in K$. Man bezeichnet $(a_j)_{j \in J}$ als ϵ-*Netz* von K, wenn $K \subset \bigcup_{j \in J} B_\epsilon(a_j)$.

3.3 Lemma. *Wenn K kompakt ist, dann hat K zu jedem $\epsilon > 0$ ein endliches ϵ-Netz.*

3.4 Definition. Der *Durchmesser* einer Menge $A \subset X$ ist gleich $\sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

3.5 Definition. Sei $(U_j)_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von K. Wenn es ein $\lambda > 0$ gibt, so dass alle Teilmengen von K mit Durchmesser $< \lambda$ in wenigstens einem U_j enthalten sind, dann bezeichnet man λ als *Lebesgue-Zahl* der Überdeckung.

Beispiel. Durch $U_0 = (-\infty, 1)$ und $U_j = (j - 1, j + \frac{1}{j})$ für $j \in \mathbb{N}$ wird eine offene Überdeckung $(U_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ von $\mathbb{R}$ gegeben. Sie besitzt weder eine endliche Teilüberdeckung noch eine Lebesguezahl.

3.6 Satz. *Für eine Teilmenge K eines metrischen Raums X sind gleichwertig:*

(a) K *ist kompakt.*

(b) K *besitzt die endliche Überdeckungseigenschaft.*

(c) Jede offene Überdeckung von K besitzt eine Lebesgue-Zahl, und K besitzt zu jedem $\epsilon > 0$ ein endliches ϵ-Netz.

(d) Falls $(A_j)_{j \in J}$ ein System abgeschlossener Mengen in X mit $K \cap \bigcap_{j \in J} A_j = \emptyset$ ist, dann gibt es eine endliche Teilmenge $\{j_1, \ldots, j_n\}$ von J, so dass $K \cap \bigcap_{k=1}^{n} A_{j_k} = \emptyset$.

Beispiel. Es sei X irgendeine unendliche Menge, die mit der diskreten Metrik versehen ist

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Dann ist $(\{x\})_{x \in X}$ eine offene Überdeckung von X. Sie besitzt die Lebesguezahl $\frac{1}{2}$, aber X besitzt kein endliches ϵ-Netz, falls $\epsilon < 1$.

4. Das Lebesgue-Maß

4.1 Satz. *Es gibt genau ein Prämaß* λ^n *auf* $\mathcal{F}^n$ *mit*

$$\lambda^n([a,b[) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n) \quad \textit{für alle } [a,b[\in \mathcal{Q}^n.$$

4.2 Satz. *Sei* $\mathcal{A}(\mathcal{F}^n)$ *die von den Figuren erzeugte* σ*-Algebra. Dann* $\mathcal{A}(\mathcal{F}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

4.3 Definition. Sei λ^n das in Satz 4.1 auf $\mathcal{F}^n$ erklärte Prämaß, und sei $(\lambda^n)^*$ das zugehörige äußere Maß. Die σ-Algebra $\mathcal{A}_{(\lambda^n)^*}$ besteht aus den *Lebesgue-messbaren* Mengen. Man bezeichnet sie mit $\mathcal{L}^n$. Die Einschränkung von $(\lambda^n)^*$ auf $\mathcal{L}^n$ wird wieder mit λ^n bezeichnet.

4.4 Bemerkung. Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit metrischem X und $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$, dann bezeichnet man μ als *Borelmaß.* Das Lebesgue-Maß ist ein Borelmaß.

4.5 Satz. *Sei* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *beschränkt. Dann sind äquivalent:*

(a) $A \in \mathcal{L}^n$.

(b) Zu jedem $j \in \mathbb{N}$ *gibt es* $F_j, G_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*, so dass* $F_j \subseteq A \subseteq G_j$ *und* $\lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j}$*. Dabei kann* G_j *als abzählbare Vereinigung von Quadern und* F_j *als abzählbarer Durchschnitt von Figuren gewählt werden.*

(c) Es gibt $F, G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $F \subseteq A \subseteq G$ *und* $\lambda^n(G \setminus F) = 0$.

Im Fall (c) gilt $\lambda^n(A) = \lambda^n(F) = \lambda^n(G)$.

4.6 Definition. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Mengen $M \in \mathcal{A}$ mit $\mu(M) = 0$ bezeichnet man als *Nullmengen.*

Das Maß μ ist *vollständig,* wenn alle Teilmengen von Nullmengen μ-messbar sind.

4.7 Korollar. *Das Lebesgue-Maß ist vollständig.*

Das hatten wir auch bereits in Bemerkung 2.11 gesehen.

4.8 Korollar. *Seien* $-\infty < a_j < b_j < \infty$ *für* $j = 1, \ldots, n$*. Sei* $\prod_{j=1}^n]a_j, b_j[\subseteq M \subseteq \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$*. Dann ist* M *Lebesgue-messbar mit* $\lambda^n(M) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$.

4.9 Definition. Für $a \in \mathbb{R}^n$ ist $\tau_a \colon x \mapsto x + a$ die *Translationsabbildung* um den Vektor a.

Ein Maß μ auf dem $\mathbb{R}^n$ heißt *translationsinvariant*, wenn für jedes $a \in \mathbb{R}^n$ und jede messbare Menge A auch $\tau_a(A)$ messbar ist mit $\mu(A) = \mu(\tau_a(A))$.

Das Lebesgue-Maß ist translationsinvariant und das Dirac-Maß ist nicht translationsinvariant.

4.10 Satz. *Sei μ ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) μ ist translationsinvariant.

(b) Es gibt eine beschränkte Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit nichtleerem Inneren, so dass $0 < \mu(B) < \infty$.

Dann gibt es ein $C > 0$, so dass $\mu(A) = C\lambda^n(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

4.11 Definition. Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *orthogonal*, wenn M invertierbar ist mit $M^T = M^{-1}$. (Hierbei ist M^T die Transponierte von M.) Die Menge aller orthogonalen $n \times n$-Matrizen wird mit $O(n)$ bezeichnet.

4.12 Lemma. *Jede Matrix $M \in GL(\mathbb{R}, n)$ lässt sich schreiben als $M = S_1 D S_2$, wobei S_1, S_2 orthogonale Matrizen und D eine Diagonalmatrix mit positiven Einträgen sind.*

4.13 Satz. *Sei $T \in GL(\mathbb{R}, n)$. Dann $T(M) \in \mathcal{L}^n$ und $\lambda^n(T(M)) = |\det(T)|\lambda^n(M)$ für alle $M \in \mathcal{L}^n$.*

4.14 Definition. $H \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine *affine Hyperebene*, wenn es einen $(n-1)$-dimensionalen Unterraum V des $\mathbb{R}^n$ und ein $a \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $H = V + a = \{a + v \mid v \in V\}$.

4.15 Korollar. *Sei H eine affine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ und sei $M \subseteq H$. Dann gilt $\lambda^n(M) = 0$.*

4.16 Beispiel (Vitali). Es gibt eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, die nicht Lebesgue-messbar ist.

Im Beweis von Satz 4.2 wurde das folgende Ergebnis verwendet:

4.17 Satz. *Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ und sei $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$. Für jede offene Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ existieren eine Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in G und eine Folge $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ positiver Zahlen, so dass*

$$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{r_j}(a_j).$$

5. Abzählbare Mengen und Kardinalzahlen

Wir wiederholen zuerst einige Aussagen über Bild- und Urbildmengen:

5.1 Satz. *Sei* $f\colon X \to Y$ *eine Abbildung und sei* J *eine Indexmenge. Seien* $A, B \subseteq X$ *und* $C, D \subseteq Y$ *und für jedes* $j \in J$ *seien* $A_j \subseteq X$ *und* $B_j \subseteq Y$*. Dann*

(a) $f\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f(A_j)$.

(b) $f\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) \subseteq \bigcap_{j\in J} f(A_j)$.

(c) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$.

(d) $f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

(e) $f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

(f) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

5.2 Definition. Eine Menge M heißt *endlich*, wenn es ein $m \in \mathbb{N}_0$ und eine Bijektion von $\{1, \dots, m\}$ auf M gibt. Andernfalls heißt M *unendlich*.

Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn es eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf M gibt.

Eine Menge heißt *höchstens abzählbar*, wenn sie endlich oder abzählbar ist. Andernfalls heißt sie *überabzählbar*.

5.3 Satz. *Sei* A *abzählbar und* $M \subseteq A$*. Dann ist* M *höchstens abzählbar.*

5.4 Satz. *Für* $M \neq \emptyset$ *sind äquivalent:*

(a) M *ist höchstens abzählbar.*

(b) Es gibt eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ *auf* M*.*

5.5 Satz (Diagonalfolgenargument). *Sind* X, Y *abzählbar, so ist* $X \times Y$ *abzählbar.*

5.6 Beispiel. (a) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{Q}^n$ abzählbar.

5.7 Satz. *Sind* $X_1, X_2, X_3, \dots$ *höchstens abzählbare Teilmengen einer Menge* Z*, so ist* $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ *höchstens abzählbar.*

5.8 Satz. $[0, 1]$ *ist überabzählbar.*

5.9 Definition. Zwei Mengen X und Y *haben die gleiche Kardinalzahl*, wenn es eine Bijektion von X auf Y gibt. Wenn es eine Injektion von X nach Y gibt, dann ist die Kardinalzahl von X kleiner oder gleich der Kardinalzahl von Y.

5.10 Satz (Schröder-Bernstein). *Wenn die Kardinalzahl von X kleiner oder gleich der Kardinalzahl von Y ist und die Kardinalzahl von Y kleiner oder gleich derjenigen von X, dann besitzen X und Y die gleiche Kardinalzahl.*

Beweis. Findet man z. B. in Kapitel 22 von Halmos, "Naive Mengenlehre". $\square$

5.11 Satz. $\mathbb{R}^n$ *hat die gleiche Kardinalzahl wie* $\mathbb{R}$.

5.12 Satz. $]0, 1[$, $[0, 1]$ *und* $\mathbb{R}$ *haben alle dieselbe Kardinalzahl.*

5.13 Satz. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *hat die gleiche Kardinalzahl wie* $\mathbb{R}$.

5.14 Bemerkung. Die *Kontinuumshypothese* besagt, dass jede überabzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ die gleiche Kardinalzahl besitzt wie $\mathbb{R}$. Die Kontinuumshypothese kann mit den Mitteln der Mengenlehre weder bewiesen noch widerlegt werden.

6. Messbare Abbildungen

6.1 Definition. Sein $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ Messräume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *messbar*, wenn für jedes $B \in \mathcal{B}$ gilt $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

6.2 Beispiel. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Die *charakteristische Funktion* χ_A von A ist definiert durch

$$\chi_A\colon X \to \mathbb{R}, \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

χ_A ist genau dann eine messbare Funktion, wenn A eine messbare Menge ist.

6.3 Satz. *Seien X und Y metrische Räume und sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X mit $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$. Ferner sei Y mit der Borelalgebra $\mathcal{B}(Y)$ versehen. Falls $f\colon X \to Y$ stetig ist, so ist f messbar.*

6.4 Bezeichnung. (a) Wir setzen $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

(b) $\overline{\mathbb{R}}$ wird geordnet durch

$$x \prec y \Leftrightarrow \begin{cases} x < y, & x, y \in \mathbb{R}, \\ y \neq -\infty, & x = -\infty, \\ x \neq \infty, & y = \infty. \end{cases}$$

Wir schreiben diese Ordnung ebenfalls mit dem Zeichen $<$.

(c) Mit dieser Ordnung ist die folgende Abbildung streng monoton

$$\varphi\colon \overline{\mathbb{R}} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \mapsto \begin{cases} \arctan(x), & x \in \mathbb{R}, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = -\infty, \\ \frac{\pi}{2}, & x = \infty. \end{cases}$$

(d) Wir machen $\overline{\mathbb{R}}$ dadurch zu einem metrischen Raum, dass wir verlangen, dass die Abbildung φ aus (c) eine Isometrie wird. Mit anderen Worten, wir setzen $d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$. Somit ist die Borel-Algebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ erklärt.

6.5 Lemma. *$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ist die kleinste σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$, die $\{-\infty\}$ sowie alle halboffenen Intervalle $[a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$, enthält.*

6.6 Bemerkung. Da weder $\infty - \infty$ noch $0 \cdot \infty$ erklärt werden können, erbt $\overline{\mathbb{R}}$ keine der beiden arithmetischen Operationen von $\mathbb{R}$. Allerdings wird $\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x \geq 0\}$ duch die offensichtliche Addition zu einem Monoid, also einer Halbgruppe mit neutralem Element.

6.7 Definition. Jede Abbildung $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ bezeichnet man als *numerische Funktion.*

Eine numerische Funktion $f\colon (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt messbar, wenn $f\colon (X, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbar ist.

6.8 Satz. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und f eine numerische Funktion auf X. Dann sind äquivalent:*

(a) f *ist messbar.*

(b) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ *ist* $\{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\}$ *messbar.*

(c) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ *ist* $\{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$ *messbar.*

(d) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ *ist* $\{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$ *messbar.*

(e) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ *ist* $\{x \in X \mid f(x) < \alpha\}$ *messbar.*

6.9 Satz. *Seien f und g messbare numerische Funktionen auf X. Dann sind die folgenden Mengen messbar*

(a) $\{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$,

(b) $\{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$,

(c) $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$,

(d) $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$.

6.10 Satz. *Seien $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ messbar. Dann sind $f + g$ und fg messbar.*

6.11 Definition. Für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definieren wir

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\sup\{a_k \mid k \geq n\}\big) \in \overline{\mathbb{R}},$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\inf\{a_k \mid k \geq n\}\big) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Da die Folge $(\sup\{a_k \mid k \geq n\})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fällt, existiert ihr Grenzwert. Für den $\liminf$ argumentiert man genauso.

6.12 Bemerkung. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn $\limsup_{n\to\infty} a_n = a = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

6.13 Satz. *Seien $f_1, f_2, \ldots$ messbare numerische Funktionen.*

(a) *Die Funktionen* $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *und* $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *sind messbar.*

(b) *Die Funktionen* $\limsup_{n\to\infty} f_n$ *und* $\liminf_{n\to\infty} f_n$ *sind messbar.*

(c) *Wenn die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *punktweise in* $\overline{\mathbb{R}}$ *gegen* f *konvergiert, dann ist* f *messbar.*

Beweis. (a) $\left\{x \in X \,\middle|\, \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \leq \alpha\right\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x \in X \mid f_n(x) \leq \alpha\}$.

(b) $\left\{x \in X \,\middle|\, \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \leq \alpha\right\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty}\{x \in X \mid f_k(x) \leq \alpha + \frac{1}{j}\}$. Es gilt nämlich $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) \leq \alpha$ genau dann, wenn es zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\sup_{k\geq N} a_k \leq \alpha + \frac{1}{j}$.

(c) Unter der Voraussetzung von (c) ist $f(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$. $\square$

7. Integrationstheorie

In diesem Kapitel ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

7.1 Definition. Eine Funktion $f \colon X \to \mathbb{R}$ heißt *nicht-negative Treppenfunktion*, wenn gilt

(a) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in X$.

(b) f ist messbar.

(c) f nimmt nur endlich viele Werte an.

Mit $\mathcal{T}^+(X)$ bezeichnen wir die Menge der nicht-negativen Treppenfunktionen auf X.

7.2 Bemerkung. Jedes $f \in \mathcal{T}^+(X)$ lässt sich darstellen als $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $\alpha_i \geq 0$ und $A_i \in \mathcal{A}$. Die Summe $\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i)$ ist unabhängig von der Zerlegung.

7.3 Definition. Für $f \in \mathcal{T}^+(X)$, $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}$, definiert man das *Integral von* f durch

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i).$$

Bemerkung. Wenn $f, g \in \mathcal{T}^+(X)$ mit $f \leq g$, dann $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$. Das folgt aus der Unabhängigkeit der Summe $\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i)$ von der Zerlegung.

7.4 Satz. *Sei* f *eine messbare, nicht-negative, numerische Funktion auf* X. *Dann gibt es eine wachsende Folge* $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *in* $\mathcal{T}^+(X)$ *mit* $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$.

7.5 Lemma. *Seien* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *und* $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *zwei monoton wachsende Folgen nicht-negativer Treppenfunktionen auf* X *mit* $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$. *Dann*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int g_n \, d\mu.$$

Insbesondere gilt $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int g_n \, d\mu$, *wenn* $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$.

7.6 Definition. Unter $\mathcal{M}^+(X)$ verstehen wir die Menge aller messbaren, nicht-negativen numerischen Funktionen auf X. Für $f \in \mathcal{M}^+(X)$ wählen wir eine monoton wachsende Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{T}^+(X)$ mit $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$ und setzen $\int f \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int g_n \, d\mu$.

7.7 Korollar. *Für* $f, g \in \mathcal{M}^+(X)$ *mit* $f \leq g$ *gilt* $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

7.8 Bezeichnung. Für eine numerische Funktion f auf X seien $f^+ = \max\{f, 0\}$ und $f^- = -\min\{f, 0\}$. Dann $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$, und f ist genau dann messbar, wenn f^+ und f^- messbar sind.

7.9 Definition. Eine numerische Funktion f auf X heißt μ-integrierbar, wenn sie messbar ist und $\int f^+ d\mu$ und $\int f^- d\mu$ endlich sind. In diesem Fall schreiben wir

$$\int f\, d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

7.10 Satz. *Seien f und g integrierbare numerische Funktionen auf X und sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann sind auch αf, $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ und — falls überall definiert — auch $f + g$ integrierbar. Man hat*

$$\int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu \quad \textit{und} \quad \int (f + g) d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

7.11 Beispiel. Sei μ das in Beispiel 2.17 erklärte Zählmaß auf $\mathbb{N}$. Die numerischen Funktionen sind die Folgen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$, und diejenigen Folgen mit Werten in $[0, \infty[$, die nur endlich viele Werte annehmen, sind die nicht-negativen Treppenfunktionen. Eine numerische Funktion f auf $\mathbb{N}$ ist genau dann integrierbar, wenn sei weder ∞ noch $-\infty$ annimmt und die zugehörige Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ absolut konvergiert. In diesem Fall gilt $\int f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

7.12 Definition. Man sagt, eine Eigenschaft gelte μ-*fast überall*, wenn die Menge aller Punkte, die die Eigenschaft nicht haben, in einer μ-Nullmenge liegt.

7.13 Beispiel. Sei $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}$. Die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert λ^1-fast überall gegen 1.

7.14 Satz. *Für $f \in \mathcal{M}^+(X)$ gilt $\int f\, d\mu = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ μ-fast überall.*

7.15 Beispiel. Sei $N \in \mathcal{A}$ eine Nullmenge. Sei

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & x \in N, \\ 0, & x \notin N. \end{cases}$$

Dann $\int f\, d\mu = 0$.

Das bedeutet $0 \cdot \infty = 0$, wenn 0 ein Maß und ∞ ein Funktionswert ist. Offensichtlich gilt das ebenso, wenn 0 ein Funktionswert und ∞ ein Maß ist. Wenn dagegen — wie in der Analysis I — beide Zahlen Grenzwerte sind, dann hilft weiterhin nur eine feinere Analyse des Wachstumsverhaltens, etwa mittels der Regel von l'Hôpital.

8. Das Lebesgue-Integral

8.1 Bezeichnung. (a) Das Lebesgue-Integral hat besondere Schreibweisen. Statt

$$\int f \, d\lambda^n$$

schreibt man auch

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\lambda^n(x) \quad \text{oder} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \quad \text{oder} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \, dx_2 \dots dx_n.$$

(b) Das Lebesguemaß wird häufig auf Teilmengen eingeschränkt. Ist also $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, so ist $\mathcal{L}^n(Y) = \{X \subseteq Y \mid X \in \mathcal{L}^n\}$ eine σ-Algebra auf Y. Die Einschränkung von λ^n auf $\mathcal{L}^n(Y)$ ist ein Maß auf Y. Statt $\int f \, d\lambda^n|_Y$ schreibt man $\int_Y f \, d\lambda^n$ oder $\int_Y f(x) d\lambda^n(x)$ oder ähnliches. Beachte

$$\int_Y f(x) d\lambda^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Y(x) f(x) d\lambda^n(x).$$

Im Unterschied zum Riemann-Integral schreibt man beim Lebesgue-Integral also immer eine Menge an das Integralzeichen.

Für eine Riemann-integrierbare Funktion f schreiben wir das Riemann-Integral als $\int_a^b f(x) dx$. Für eine Lebesgue-integrierbare Funktion g schreiben wir das Lebesgue-Integral als $\int_{[a,b]} g \, d\lambda^1$. Später werden wir die strikte Trennung der Schreibweisen aufgeben.

8.2 Satz. *Sei* $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar. Dann ist* f *Lebesgue-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f \, d\lambda^1.$$

Bemerkung. In Elstrodt, Beispiel IV.6.2 c), wird eine Funktion angegeben, die zwar Riemann-integrierbar, aber nicht Borel-messbar ist.

8.3 Definition. Eine *elementare Treppenfunktion* im $\mathbb{R}^n$ ist eine Funktion der Form $\sum_{j=1}^m a_j \chi_{Q_j}$ mit $Q_j \in \mathcal{Q}^n$ und $a_j \in \mathbb{R}$. Die Menge aller elementaren Treppenfunktionen bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, der mit $\mathcal{T}_0(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet wird.

8.4 Satz. *Sei* f *eine* λ^n*-integrierbare, numerische Funktion auf dem* $\mathbb{R}^n$*. Zu jedem* $\epsilon > 0$ *gibt es eine elementare Treppenfunktion* t *mit* $\int |f - t| d\lambda^n < \epsilon$.

9. Grenzwertsätze

9.1 Theorem (Satz über monotone Konvergenz, Satz von Beppo Levi). *Sei* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und sei* $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ *eine monoton wachsende Folge in* $\mathcal{M}^+(X)$. *Dann*

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

9.2 Beispiel. Das Wort "wachsend" kann nicht durch "fallend" ersetzt werden. Sei nämlich $f_n = \chi_{[n,\infty)}$. Dann bilden die f_n eine monoton fallende Folge in $\mathcal{M}^+(\mathbb{R})$. Für jedes n gilt $\int f_n d\lambda^1 = \infty$, aber $\int \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda^1 = 0$.

9.3 Satz (Lemma von Fatou). *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathcal{M}^+(X)$. *Dann ist die Funktion* $\liminf_{n\to\infty} f_n$ *in* $\mathcal{M}^+(X)$ *und*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Beispiel. Sei $f_n(x) = \max\{0, 1 - |x - n|\}$. Dann $\int f_n d\lambda^1 = 1$, aber $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = 0$ für alle x.

9.4 Theorem (Satz über majorisierte Konvergenz, Lebesguescher Grenzwertsatz). *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge integrierbarer numerischer Funktionen auf* X, *die fast überall punktweise gegen eine messbare, numerische Funktion* f *konvergiert. Es gebe eine integrierbare numerische Funktion* g *auf* X, *so dass* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *für alle* $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* f *integrierbar und*

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Es gilt sogar $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu = 0$.

9.5 Bemerkung. Eine uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion f ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Also ist beispielsweise die Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ über $\mathbb{R}$ nicht Lebesgue-integrierbar.

9.6 Bezeichnung. Seien I ein offenes Intervall und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $f\colon I \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wenn

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t,x) - f(t_0,x)}{t - t_0}$$

existiert, so schreiben wir $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)$ für den Grenzwert.

Ferner definieren wir für jedes $t \in I$ die Abbildung $f_t\colon X \to \mathbb{R}$, $f_t(x) = f(t,x)$.

9.7 Satz. $f\colon I \times X \to \mathbb{R}$ *habe die folgenden Eigenschaften*

(a) Für alle $t \in I$ *ist* f_t *integrierbar.*

(b) Für alle $(t, x) \in I \times X$ *existiert* $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$.

(c) Es gibt eine integrierbare, numerische Funktion g *mit* $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\right| \leq g(x)$ *für alle* $(t, x) \in I \times X$.

Definiert man nun $F\colon I \to \mathbb{R}$ *durch* $F(t) = \int f(t, x) d\mu(x)$, *so gelten*

(1) F *ist differenzierbar.*

(2) $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_t : X \to \mathbb{R}$ *ist integrierbar für jedes* $t \in I$.

(3) $F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu(x)$ *für jedes* $t \in I$.

9.8 Beispiel. Sei $f(t) \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(tx) dx$. Aus dem Satz folgt mittels partieller Integration

$$f'(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} \sin(xt) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{2} e^{-x^2} \cos(xt) dx = -\frac{t}{2} f(t).$$

Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen wissen wir nun, dass

$$f(t) = C e^{-t^2/4} \quad \text{für } C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Wir werden in einem der nächsten Kapitel zeigen, dass $C = \sqrt{\pi}$.

10. Der Satz von Fubini

In diesem Kapitel sind $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n+m = N$. Die Elemente des $\mathbb{R}^N$ werden häufig als Paare (x, y) mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ geschrieben.

10.1 Bezeichnung. Für $E \subseteq \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ setzen wir

$$\begin{aligned} E_x &= \{\eta \in \mathbb{R}^m \mid (x, \eta) \in E\}, \\ E^y &= \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid (\xi, y) \in E\}. \end{aligned}$$

10.2 Satz. *Sei* $E \in \mathcal{L}^N$. *Dann gibt es eine Lebesgue-Nullmenge* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, *so dass*

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ *ist* $E_x \in \mathcal{L}^m$.

(b) Die numerische Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} \lambda^m(E_x), & x \in \mathbb{R}^n \setminus A \\ 0, & x \in A, \end{cases}$$

ist auf $\mathbb{R}^n$ *Lebesgue-messbar.*

(c) $\lambda^N(E) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus A} \lambda^m(E_x)\, d\lambda^n(x)$.

Entsprechendes gilt, wenn man x *und* y *vertauscht.*

10.3 Korollar (Cavalierisches Prinzip). *Seien* $E, F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *mit* $\lambda^m(E_x) = \lambda^m(F_x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$. *Dann* $\lambda^N(E) = \lambda^N(F)$.

10.4 Korollar. $E \in \mathcal{L}^N$ *ist genau dann eine Nullmenge, wenn*

$$\lambda^m(E_x) = 0 \qquad \lambda^n\text{-}f.\ddot{u}.$$

10.5 Bezeichnung. Wenn A eine Lebesgue-Nullmenge und g eine Lebesgue-messbare numerische Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus A$ ist, dann gibt es eine Lebesgue-messbare numerische Funktion $\widetilde{g}$ auf dem $\mathbb{R}^n$, die in $\mathbb{R}^n \setminus A$ mit g übereinstimmt. Da $\int \widetilde{g}\, d\lambda^n$ nur von g abhängt, setzen wir

$$\int g\, d\lambda^n = \int \widetilde{g}\, d\lambda^n.$$

Mit dieser Setzung liest sich Aussage (c) des Satzes wie folgt

(c′) $\lambda^N(E) = \int \lambda^m(E_x) d\lambda^n(x)$.

10.6 Beispiel. Sei $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ der Einheitskreis. Nach Cavalieri erhalten wir

$$\lambda^2(E) = 2\int_{[-1,1]} \sqrt{1-y^2}\,d\lambda^1(y) = 4\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = 4\int_0^{\pi/2} \cos(t)^2\,dt = \pi.$$

10.7 Satz (Tonelli). *Sei f eine nicht-negative, Lebesgue-messbare, numerische Funktion auf dem $\mathbb{R}^N$. Dann existiert eine Lebesgue-Nullmenge $A \subseteq \mathbb{R}^m$, so dass für jedes $y \in \mathbb{R}^m \setminus A$ die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ Lebesgue-messbar ist. Ferner ist die numerische Funktion $g(y) = \int f(x,y)\,d\lambda^n(x)$ auf $\mathbb{R}^m \setminus A$ Lebesgue-messbar, und es gilt*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,d\lambda^N(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m} g(y)\,d\lambda^m(y) &= \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d\lambda^n(x)\right)d\lambda^m(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,d\lambda^m(y)\right)d\lambda^n(x).\end{aligned}$$

10.8 Theorem (Fubini). *Sei f eine Lebesgue-integrierbare numerische Funktion auf dem $\mathbb{R}^N$. Dann existiert eine Lebesgue-Nullmenge $A \subseteq \mathbb{R}^m$, so dass für jedes $y \in \mathbb{R}^m \setminus A$ die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ Lebesgue-integrierbar ist. Ferner ist die numerische Funktion $g(y) = \int f(x,y)\,d\lambda^n(x)$ auf $\mathbb{R}^m \setminus A$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,d\lambda^N(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m} g(y)\,d\lambda^m(y) &= \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d\lambda^n(x)\right)d\lambda^m(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,d\lambda^m(y)\right)d\lambda^n(x).\end{aligned}$$

Bemerkung. In der Praxis zeigt man die Intergrierbarkeit von f erst mit dem Satz von Tonelli und berechnet dann den Integralwert mit dem Satz von Fubini.

10.9 Beispiel. Sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > y,\\ -\frac{1}{y^2}, & x \leq y.\end{cases}$$

Den Graphen von f zeigt Abbildung 10.1.

Für festes $y \in [0,1]$ gilt

$$\int_{[0,1]} f(x,y)\,d\lambda^1(x) = -\int_0^y \frac{1}{y^2}dx + \int_y^1 \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{y} - 1 + \frac{1}{y} = -1.$$

Dagegen gilt für festes $x \in [0,1]$

$$\int_{[0,1]} f(x,y)\,d\lambda^1(y) = \int_0^x \frac{1}{x^2}dy - \int_x^1 \frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{y} = 1.$$

Daher $\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(x,y)\,d\lambda^1(x)\,d\lambda^1(y) = -1$ und $\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(x,y)\,d\lambda^1(y)\,d\lambda^1(x) = 1$. Wegen des Satzes von Fubini folgt, dass f nicht integrierbar ist.

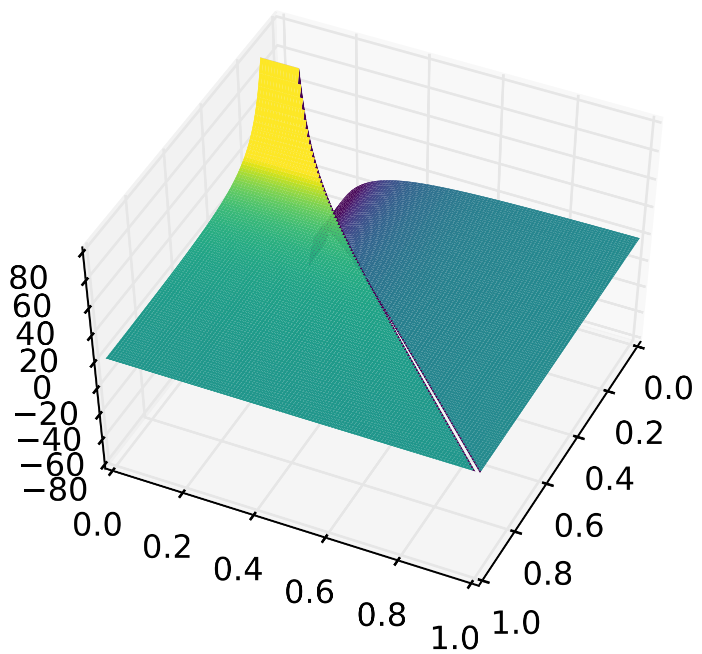

Abbildung 10.1.: Graph der Funktion aus Beispiel 10.9

10.10 Beispiel. Betrachte für $R > 0$ die Funktion $f\colon [0, R] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{-xy}\sin(x)$. Diese Funktion ist stetig, also messbar. Es gilt $|f(x, y)| \leq xe^{-xy}$, also nach Tonelli

$$\int_{[0,R]\times[0,\infty)} |f(x,y)|\,d\lambda^2 \leq \int_{[0,R]\times[0,\infty)} xe^{-xy}\,d\lambda^2 = \int_0^R \int_0^\infty xe^{-xy}\,dy\,dx = \int_0^R 1\,dy = R.$$

Also kann der Satz von Fubini angewandt werden

$$\int_{[0,R]\times[0,\infty)} f(x,y)\,d\lambda^2 = \int_0^R \int_0^\infty \sin(x)e^{-xy}\,dy\,dx = \int_0^R \frac{\sin(x)}{x}\,dx \to \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx,$$

da uns die Existenz des uneigentlichen Riemann-Integrals bereits aus der Analysis I bekannt ist.

Andererseits ist für festes y die Funktion $x \mapsto -\frac{e^{-xy}}{y^2+1}(y\sin(x)+\cos(x))$ eine Stammfunktion von $x \mapsto e^{-xy}\sin(x)$. Daher

$$\begin{aligned}\int_{[0,R]\times[0,\infty)} f(x,y)\,d\lambda^2 &= \int_0^\infty \int_0^R \sin(x)e^{-xy}\,dx\,dy \\ &= \int_{[0,\infty)} \left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{e^{-Ry}}{y^2+1}(y\sin(R)+\cos(R)\right) d\lambda^1(y).\end{aligned}$$

Für genügend großes C ist $\frac{C}{y^2+1}$ eine Majorante des Integranden. Wir erhalten also aus dem Lebesgueschen Grenzwertsatz

$$\lim_{R\to\infty} \int_{[0,R]\times[0,\infty)} f(x,y)\,d\lambda^2 = \int_{[0,\infty)} \frac{1}{y^2+1}\,d\lambda^1(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Wir haben gezeigt

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Bemerkung. Die Sätze von Fubini und Tonelli gelten auch in allgemeineren Situationen. Die Hauptschwierigkeit besteht dabei in der Konstruktion des Produktmaßes.

11. Die Transformationsformel

Für eine Abbildung $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^m$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, hatten wir mit $Df(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die Jacobi-Matrix bezeichnet. Sie besteht aus den partiellen Ableitungen der Komponenten von Φ. Ein C^1-Diffeomorphismus $\Phi\colon U \to V$ ist eine bijektive C^1-Abbildung, deren Inverse ebenfalls von der Klasse C^1 ist; das ist nur möglich für $n = m$.

Auf dem $\mathbb{R}^{n\times n}$ verwenden wir in diesem Abschnitt die Matrixnorm, die zur Supremumsnorm gehört, also

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_\infty \le 1} \|Ax\|_\infty.$$

Mit E_n bezeichnen wir die $n \times n$-Einheitsmatrix.

11.1 Satz. *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen, sei* $T \in GL(\mathbb{R}, n)$, *und sei* $V := T(U)$.

(a) Ist $A \subseteq U$ *Lebesgue-messbar, so gilt*

$$\lambda^n(T(A)) = \int_A |\det(T)| d\lambda^n.$$

(b) Ist $f\colon V \to \mathbb{R}$ *integrierbar, so ist auch* $f \circ T$ *integrierbar.*

(c) Ist $f\colon V \to \mathbb{R}$ *integrierbar, so gilt*

$$\int_{T(U)} f(y) d\lambda^n(y) = \int_U f(Tx)|\det(T)| d\lambda^n(x).$$

11.2 Lemma. *Seien* $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $\Phi\colon U \to V$ *ein* C^1*-Diffeomorphismus. Für jede Borelmenge* $M \subseteq U$ *ist* $\Phi(M)$ *eine Borelmenge.*

Bezeichnung. Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ bezeichnen wir mit $W(a, r)$ den halboffenen Würfel $[a - r, a + r[= \prod_{j=1}^n [a_j - r, a_j + r)$.

11.3 Lemma. *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen, sei* $W(a, r) \subseteq U$ *ein halboffener Würfel und sei* $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ *ein* C^1*-Diffeomorphismus, für welchen ein* $\epsilon \in]0, 1[$ *existiert, so dass* $\|D\Phi(x) - E_n\| \le \epsilon$ *für alle* $x \in W(a, r)$. *Dann gilt für jedes* $\delta \le r$

$$\Phi(W(a, \delta)) \subseteq W(\Phi(a), (1 + \epsilon)\delta).$$

11.4 Lemma. *Seien* $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $\Phi\colon U \to V$ *ein* C^1*-Diffeomorphismus. Sei* Q *ein achsenparalleler Quader mit* $\overline{Q} \subset U$*. Dann*

$$\lambda^n(\Phi(Q)) \leq \int_Q |\det(D\Phi(x))| d\lambda^n(x).$$

11.5 Definition. Sei X ein metrischer Raum.

(a) Für jedes $A \subset X$ mit $\emptyset \neq A$ wird die *Distanzfunktion* gegeben durch

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

(b) Sei $U \subseteq X$ offen. Ein *kompakte Ausschöpfung* von U besteht aus einer Folge $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq U$ kompakter Mengen, so dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = U$.

11.6 Lemma. *(a) Für* $x, y \in X$ *gilt* $|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leq d(x, y)$.

(b) Jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *besitzt eine kompakte Ausschöpfung.*

11.7 Lemma. *Für* Φ *wie in Lemma 11.4 sei* $M \subseteq U$ *Lebesgue-messbar. Dann ist* $\Phi(M)$ *Lebesgue-messbar mit*

$$\lambda^n(\Phi(M)) \leq \int_M |\det(D\Phi(x))| \, d\lambda^n(x).$$

11.8 Satz (Transformationssatz). *Seien* $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $\Phi\colon U \to V$ *ein* C^1*-Diffeomorphismus.*

(a) Ist $A \subseteq U$ *Lebesgue-messbar, so gilt*

$$\lambda^n(\Phi(A)) = \int_A |\det(D\Phi(x))| \, d\lambda^n(x).$$

(b) Eine Lebesgue-messbare, numerische Funktion f *auf* V *ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn* $|\det(D\Phi)| \cdot (f \circ \Phi)$ *Lebesgue-integrierbar ist.*

(c) In diesem Fall gilt

$$\int_V f(y) d\lambda^n(y) = \int_U f(\Phi(x)) \, |\det(D\Phi(x))| \, d\lambda^n(x).$$

11.9 Satz (Ebene Polarkoordinaten). *Ist* f *eine Lebesgue-messbare, numerische Funktion auf dem* $\mathbb{R}^2$*, so ist* f *genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn die Funktion* $(r, t) \mapsto r\, f(r\cos(t), \, r\sin(t))$ *über* $[0, \infty[\times [0, 2\pi[$ *Lebesgue-integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{[0,2\pi]} \int_{[0,\infty[} f(r\cos(t), \, r\sin(t)) r \, dr \, dt.$$

11.10 Beispiel.

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy\right) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$
$$= \int_{[0,2\pi]}\int_{[0,\infty)} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_0^\infty e^{-r^2}\,r\,dr = 2\pi\,\frac{-1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^\infty = \pi.$$

Wir haben gezeigt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

11.11 Bemerkung (Kugelkoordinaten). In Analysis II, Beispiel 20.5, hatte ich Kugelkoordinaten eingeführt: Für $(r,\varphi,\theta) \in [0,\infty[\times]-\pi,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ist

$$\Psi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Wir hatten damals sogar schon ausgerechnet, dass $\det(D\Psi(r,\varphi,\theta)) = r^2\cos\theta$. Also folgt aus dem Transformationssatz, dass eine Lebesgue-messbare, numerische Funktion f auf dem $\mathbb{R}^3$ genau dann Lebesgue-integrierbar ist, wenn die Funktion

$$g\colon [0,\infty[\times]-\pi,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad (r,\varphi,\theta)\mapsto f(\Psi(r,\varphi,\theta))r^2\cos\theta,$$

Lebesgue-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{[0,2\pi]}\int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\int_{[0,\infty)} f(\Psi(r,\varphi,\theta))r^2\cos(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

11.12 Beispiel. Wir berechnen das Volumen des dreidimensionalen Einheitsballs K_3. Es gilt

$$\lambda^3(K_3) = \int_{[0,2\pi]}\int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\int_{[0,1]} r^2\cos(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_{[0,2\pi]}\int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\frac{1}{3}\cos(\theta)\,d\theta\,d\varphi$$
$$= \frac{2}{3}\int_{[0,2\pi]} d\varphi = \frac{4\pi}{3}.$$

12. L^p-Räume

Es sei wieder $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

12.1 Bezeichnung. Für $p \geq 1$ und eine messbare, numerische Funktion f auf X definieren wir

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

12.2 Lemma. *Für* $a, b > 0$ *und* $p, q \geq 1$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *gilt*

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

12.3 Satz (Höldersche Ungleichung). *Für messbare, numerische Funktionen* f, g *auf* X *und* $p, q \geq 1$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *gilt*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

12.4 Satz (Cauchy-Schwarz Ungleichung).

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

für messbare, numerische Funktionen f *und* g.

12.5 Satz (Minkowskische Ungleichung). *Seien* f, g *messbare, numerische Funktionen auf* X. *Dann gilt für jedes* $p \geq 1$

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

12.6 Definition. Sei $1 \leq p < \infty$. Dann

$$\mathscr{L}^p(X) = \left\{ f \colon X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \;\middle|\; \int |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Dann ist $\mathscr{L}^p(X)$ ein Vektorraum, und $\|f\|_p$ erfüllt (N1) und (N2). Falls das Maß nichtleere Nullmengen besitzt, so erfüllt $\|f\|_p$ aber nicht (N3), ist also nicht definit. Die Elemente von $\mathscr{L}^1(X)$ sind die μ-integrierbaren Funktionen $f \colon X \to \mathbb{R}$.

12.7 Definition. Sei $1 \leq p < \infty$. Setze

$$\mathscr{N} = \left\{ f \colon X \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int |f|^p = 0 \right\} = \left\{ f \colon X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \mid f = 0 \ \mu\text{-fast überall} \right\}.$$

Für $f \in \mathscr{L}^p(X)$ und $g \in \mathscr{N}$ folgt aus der Minkowskischen Ungleichung

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p = \|f\|_p \leq \|f+g\|_p + \|-g\|_p = \|f+g\|_p,$$

also $\|f+g\|_p = \|f\|_p$ für alle $g \in \mathscr{N}$. Wir können daher den Vektorraum

$$L^p(X) = \mathscr{L}^p(X)/\mathscr{N}$$

mit der Norm $\|f + \mathscr{N}\|_p \coloneqq \|f\|_p$ versehen. Es ist üblich, die Elemente von $L^p(X)$ als Funktionen zu schreiben.

12.8 Satz. *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge in* $L^p(X)$*. Dann gibt es eine Teilfolge* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$*, die sowohl in* $L^p(X)$ *als auch* μ*-fast überall punktweise konvergiert.*

12.9 Lemma. *Sei* E *ein normierter Raum und* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge in* E*. Falls die Folge mindestens einen Häufungspunkt besitzt, so besitzt sie genau einen Häufungspunkt und konvergiert gegen ihn.*

Zur Erinnerung: Ein *Banachraum* ist ein vollständiger normierter Raum, also einer, in dem jede Cauchyfolge konvergiert.

12.10 Satz (Riesz-Fischer). $L^p(X)$ *ist ein Banachraum.*

12.11 Definition. Ein *Skalarprodukt* auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum E ist eine Abbildung $\langle\cdot,\text{-}\rangle\colon E \times E \to \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(S1) $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \mu\langle y, z\rangle$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x, y \in E$,

(S2) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ für alle $x, y \in E$,

(S3) $\langle x, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in E$ und $\langle x, x\rangle = 0$ genau für $x = 0$.

Ein Banachraum mit einer Norm von der Form $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, wobei $\langle\cdot,-\rangle$ ein Skalarprodukt ist, ist ein *Hilbertraum.*

12.12 Bemerkung. (a) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann wird der $L^2(X)$ durch das folgende Skalarprodukt zu einem Hilbertraum

$$\langle f, g\rangle = \int fg \, d\mu.$$

(b) Das geht auch komplexwertig: Dazu betrachtet man das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int f\overline{g} \, d\mu$$

auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$L^2(X, \mathbb{C}) = \big\{f\colon X \to \mathbb{C} \;\big|\; \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) \in L^2(X)\big\}.$$

(c) Zwei Elemente x und y eines Hilbertraums stehen *senkrecht* aufeinander, wenn $\langle x, y\rangle = 0$.

(d) Für $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir $e_n \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ durch $e_n(x) = e^{inx}$. Für $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq m$ stehen e_n und e_m senkrecht aufeinander.

(e) Umgekehrt gilt: Die einzige Funktion $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$, die auf allen e_n, $n \in \mathbb{Z}$, senkrecht steht, ist die Nullfunktion. Diese Aussage ist der Grundstein der Theorie der Fourierreihen. Wir zeigen sie jetzt nicht.

13. Die Faltung

13.1 Lemma. *Für* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *ist die Funktion* $(x, y) \mapsto f(x)g(y-x)$ *in* $L^1(\mathbb{R}^{2n})$ *und für fast alle* $y \in \mathbb{R}^n$ *ist die Funktion* $x \mapsto f(x)g(y-x)$ *in* $L^1(\mathbb{R}^n)$.

13.2 Definition. Die Verknüpfung

$$*\colon L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n), \quad (f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)d\lambda^n(x),$$

bezeichnet man als *Faltungsprodukt*.

13.3 Satz. *Für* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *gilt* $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. *Insbesondere* $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

13.4 Beispiel. Für $A > 0$ sei $f = \frac{1}{A}\chi_{[0,A]}$. Für $g \in L^1(\mathbb{R})$ ist die Faltung

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y-x)d\lambda^1(x) = \frac{1}{A}\int_{[0,A]} g(y-x)d\lambda^1(x)$$

gleich dem *gleitenden Durchschnitt* von g.

13.5 Lemma. *Das Faltungsprodukt ist kommutativ.*

13.6 Definition. (a) Sei X ein metrischer Raum und sei $f \in C(X)$. Die Menge

$$\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

ist der *Träger* von f.

(b) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $k \in \mathbb{N}_0$ oder $k = \infty$. Der $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$C_c^k(G) = \{f \in C^k(G) \mid \mathrm{Supp}(f) \text{ kompakt}\}$$

ist der Raum der Funktionen der Klasse C^k mit kompaktem Träger.

13.7 Beispiel. Wir hatten in Bemerkung 15.8 der Analysis I gesehen, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

von der Klasse C^∞ ist. Setze $A = \int_{\mathbb{R}} f(x)f(1-x)d\lambda^1(x)$. Dann liegt die Funktion $g(x) = \frac{1}{A}f(x)f(1-x)$ in $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Ihr Träger ist $\mathrm{Supp}(g) = [0, 1]$. Außerdem ist g nicht-negative und $\int g\, d\lambda^1 = 1$.

13.8 Satz. *Sei* $k \in \mathbb{N}_0$ *oder* $k = \infty$, *sei* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *und sei* $g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$. *Dann* $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ *und es gilt für* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *mit* $|\alpha| \leq k$

$$\frac{\partial^{|\alpha|}(f * g)}{\partial y^\alpha} = f * \left(\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial y^\alpha}\right).$$

Teil II.

Vektoranalysis

14. Zusammenhang und Wegzusammenhang

14.1 Definition. Ein metrischer Raum X heißt *wegzusammenhängend,* wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$ gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

14.2 Beispiel. Die wegzusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle.

14.3 Satz. *Seien X, Y zwei metrische Räume und sei $f\colon X \to Y$ stetig. Ist X wegzusammenhängend, so auch $f(X)$.*

14.4 Beispiel. Die Menge $M = \overline{\{(t, \sin(\frac{1}{t})) \mid 0 < t < 1\}}$ ist nicht wegzusammenhängend.

14.5 Definition. Ein metrischer Raum X heißt *zusammenhängend,* wenn es in ihm höchstens zwei Mengen gibt, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind (nämlich $\emptyset$ und X).

14.6 Bemerkung. Für einen metrischen Raum X sind äquivalent:

(a) X ist zusammenhängend.

(b) X lässt sich nicht als disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer offener Mengen schreiben.

(c) X lässt sich nicht als disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer abgeschlossener Mengen schreiben.

14.7 Lemma. *Sei X ein metrischer Raum, sei G eine offene und abgeschlossene Teilmenge von X und sei $y \in X$. Falls es einen stetigen Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ gibt mit $\gamma(1) = y$ und $\gamma(0) \in G$, so ist y in G.*

14.8 Satz. *Jede wegzusammenhängende Menge ist zusammenhängend.*

14.9 Beispiel. M aus Beispiel 14.4 ist zusammenhängend.

14.10 Satz. *Für eine offene Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:*

(a) M ist zusammenhängend.

(b) M ist wegzusammenhängend.

(c) *Zu je zwei Punkten* $x, y \in M$ *existiert ein Weg* $\gamma\colon [0,1] \to M$ *von der Klasse* C^∞ *mit* $\gamma(0) = x$ *und* $\gamma(1) = y$.

14.11 Bemerkung. Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle.

14.12 Satz. *Seien* X, Y *zwei metrische Räume und sei* $f\colon X \to Y$ *stetig. Ist* X *zusammenhängend, so auch* $f(X)$.

15. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$

Ich wiederhole ein paar Grundbegriffe aus der Analysis II. Im Unterschied zu damals konzentrieren wir uns nun auf Untermannigfaltigkeiten von der Klasse C^∞.

15.1 Definition. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^N$ heißt k-dimensionale *Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^N$, wenn es für jedes $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^N$ von a und eine Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^{N-k}$ von der Klasse C^∞ gibt, so dass

(a) $M \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$,

(b) $\operatorname{Rang}(Df(a)) = N - k$.

Ein Diffeomorphismus ist ein C^∞-Diffeomorphismus.

15.2 Satz (Analysis II, Satz 22.4). *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^N$. Dann sind äquivalent:*

(a) M ist eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.

(b) Für jedes $a \in M$ existieren eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^N$ von a, eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^N$ und ein Diffeomorphismus $h\colon U \to V$ mit

$$h(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

15.3 Definition. Sei $W \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und sei $\varphi\colon W \to \mathbb{R}^N$ von der Klasse C^∞. Falls $\operatorname{Rang} D\varphi(x) = k$ für alle $x \in W$, so ist φ eine *Immersion.*

15.4 Definition. Seien X, Y zwei metrische Räume. Eine bijektive Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Homöomorphismus*, wenn sowohl f als auch f^{-1} stetig sind. Wenn es einen Homöomorphismus zwischen X und Y gibt, so sind die beiden Räume *homöomorph.*

15.5 Beispiel. (a) Die Abbildung $f\colon [0, 2\pi[\to S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, ist stetig und bijektiv. Sie ist aber kein Homöomorphismus. Es ist nämlich $S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$ zusammenhängend, ihr Bild unter f^{-1} ist aber gleich $[0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$, also nicht zusammenhängend.

(b) Seien X, Y metrische Räume, sei X kompakt und sei $f\colon X \to Y$ stetig und bijektiv. Dann ist f ein Homöomorphismus.

15.6 Satz (Analysis II, Satz 22.7). *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^N$. Dann sind äquivalent:*

(a) M *ist eine* k*-dimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^N$.

(b) *Für jedes* $a \in M$ *existieren eine offene Umgebung* U *von* a *in* M*, eine offene Teilmenge* $V \subseteq \mathbb{R}^k$ *und eine homöomorphe Abbildung* $\varphi\colon U \to V$*, so dass* φ^{-1} *eine Immersion ist.*

15.7 Definition. Jedes solche φ ist eine *Karte* von M. Die Inverse φ^{-1} bezeichnet man als *lokale Parametrisierung* von M.

15.8 Satz. *Sei* M *eine* k*-dimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^N$ *und seien* $\varphi_j\colon U_j \to V_j$ *zwei Karten von* M. *Sei* $U = U_1 \cap U_2$*, und seien* $W_j = \varphi_j(U)$*,* $j = 1, 2$. *Dann sind die* W_j *offene Teilmengen des* $\mathbb{R}^k$*, und die Abbildung*

$$\tau_{\varphi_1,\varphi_2} \coloneqq \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|_{W_1}\colon W_1 \to W_2$$

ist ein Diffeomorphismus. Er wird als Parametertransformation *bezeichnet.*

15.9 Definition. Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und sei $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Falls $\det(D\varphi(x)) > 0$ für alle $x \in U$, so ist φ *orientierungstreu*.

Beispiel. Im $\mathbb{R}^2$ ist die Spiegelung an der y-Achse nicht orientierungstreu.

15.10 Definition. Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.

(a) Eine Menge $\{\varphi_j\colon V_j \to W_j \mid j \in J\}$ von Karten von M heißt *Atlas* von M, wenn $M = \bigcup_{j\in J} V_j$.

(b) Zwei Karten φ_1, φ_2 heißen *gleich orientiert*, wenn $\tau_{\varphi_1,\varphi_2}$ orientierungstreu ist. (Nach unserer Definition ist die leere Abbildung orientierungstreu.)

(c) Ein Atlas heißt *orientiert*, wenn je zwei seiner Karten gleich orientiert sind.

(d) M heißt *orientierbar*, wenn M einen orientierten Atlas besitzt.

15.11 Beispiel. Ein orientierter Atlas der S^1 wird gegeben durch die beiden Karten

$$\varphi_1\colon U_1 \coloneqq S^1 \setminus \{(-1,0)\} \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} \mapsto t \in \,]-\pi, \pi[,$$

$$\varphi_2\colon U_2 \coloneqq S^1 \setminus \{(1,0)\} \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix}\cos s\\ \sin s\end{pmatrix} \mapsto s \in \,]0, 2\pi[.$$

Für $x \coloneqq \left(\begin{smallmatrix}\cos t\\ \sin t\end{smallmatrix}\right) \in U \coloneqq U_1 \cap U_2$ mit $t \in \,]-\pi, 0[\,\cup\,]0, \pi[$ sind zwei Fälle möglich:
$\cos t > 0$: Dann $\varphi_1(x) = t = \varphi_2(x)$. In diesem Fall ist $\tau_{\varphi_1,\varphi_2}$ die Identität.
$\cos t < 0$: Dann $\varphi_1(t) = t$ und $\varphi_2(t) = t + 2\pi$. Dann $\tau_{\varphi_1,\varphi_2}(t) = t + 2\pi$.

15.12 Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^N$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und sei $a \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^N$ heißt *Tangentialvektor* an M in a, falls es ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine C^∞-Abbildung $\psi\colon I \to \mathbb{R}^N$ gibt mit

(a) $\psi(I) \subseteq M$,

(b) $\psi(0) = a$,

(c) $\psi'(0) = v$.

Die Menge $T_a(M)$ aller Tangentialvektoren an M in a bezeichnet man als den *Tangentialraum* an M in a.

15.13 Satz (Analysis II, Satz 23.3). *Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$, sei $a \in M$. Laut Definition der Untermannigfaltigkeit gibt es eine Umgebung U von a und eine Abbildung $g\colon U \to \mathbb{R}^{N-k}$ von der Klasse C^∞ mit $M \cap U = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$ und $\operatorname{Rang}(Dg(a)) = N - k$.*

Nach Satz 15.6 gibt es eine lokale Parametrisierung $\varphi\colon W \to M$ und $b \in W$ mit $\varphi(b) = a$. Mit diesen Abbildungen gilt

$$\{D\varphi(b)y \mid y \in \mathbb{R}^k\} = T_a(M) = \{v \in \mathbb{R}^N \mid Dg(a)v = 0\}.$$

15.14 Definition. Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und sei $a \in M$. Das Orthogonalkomplement von $T_a(M)$ im $\mathbb{R}^N$ wird mit $N_a(M)$ bezeichnet und heißt *Normalenraum* von M in a. Die Elemente von $N_a(M)$ heißen *Normalenvektoren*.

15.15 Beispiel. Ist $a \in S^{n-1}$, so ist $T_a(S^{n-1}) = a^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (a, v) = 0\}$ und $N_a(S^{n-1})$ ist der von a erzeugte Unterraum.

15.16 Satz. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{k+1}$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sie ist genau dann orientierbar, wenn es eine stetige Abbildung $n\colon M \to \mathbb{R}^{k+1}$ gibt, so dass $n(a) \in N_a(M) \setminus \{0\}$ für jedes $a \in M$ gilt.*

15.17 Beispiel. Das Möbiusband

$$M = \left\{ \left(3\cos(t) + s\sin\left(\frac{t}{2}\right), 3\sin(t), s\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right) \middle| 0 \le t \le 2\pi, -1 < s < 1 \right\}$$

ist nicht orientierbar.

Skizze. Man zeigt zuerst, dass

$$\varphi\colon]0, 2\pi[\times]-1, 1[\to M, (t, s) \mapsto \left(3\cos(t) + s\sin\left(\frac{t}{2}\right), 3\sin(t), s\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right)$$

eine lokale Parametrisierung von M ist. In ihrem Bild erhalten wir einen Normalenvektor durch das Kreuzprodukt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} \times \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} -3\sin(t) + \frac{s}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ 3\cos(t) \\ -\frac{s}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ 0 \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3\cos(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ -\frac{s}{2}\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + 3\sin(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{s}{2}\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ -3\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(t) \end{pmatrix}$$

Der Punkte $(3,0,0) \in M$ kann approximiert werden als $\lim_{t\to 0}\varphi(t,0)$ und als $\lim_{t\to 2\pi}\varphi(t,0)$. Im ersten Fall konvergiert der Normalvektor gegen $\left(\begin{smallmatrix}3\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, im zweiten gegen $\left(\begin{smallmatrix}-3\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$. Also gibt es keine stetige Normale. $\square$

15.18 Definition. Mit $\mathbb{R}^k_- = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 \leq 0\}$ bezeichnen wir den linken Halbraum. Sein Rand ist $\partial\mathbb{R}^k_- = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 = 0\}$.

15.19 Bezeichnung. Die Untermannigfaltigkeit M ist durch Einschränkung der Metrik auf dem $\mathbb{R}^N$ selber ein metrischer Raum. Eine Menge $X \subseteq M$ ist genau dann offen in M, wenn es eine offene Menge G im $\mathbb{R}^N$ gibt, so dass $X = M \cap G$. Die analoge Aussage gilt für abgeschlossene Mengen. Mit ∂X soll nun der Rand von X als Teilmenge von M gemeint sein. Er besteht aus allen Punkten $x \in M$, so dass jede seiner Umgebungen sowohl einen Punkt in X, als auch einen Punkt in $M \setminus X$ enthält.

15.20 Definition. Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$. Dann ist X eine k-dimensionale *abgeschlossene, berandete Untermannigfaltigkeit* von M, wenn es zu jedem $a \in \partial X$ eine lokale Parametrisierung $\varphi\colon W \to V$ von M gibt, so dass gilt

(a) $a \in V$,

(b) $\varphi(\mathbb{R}^k_- \cap W) = X \cap V$,

(c) $\varphi(\partial\mathbb{R}^k_- \cap W) = \partial X \cap V$.

Eine solche lokale Parametrisierung heißt *randadaptiert* bzgl. X. Ihre Umkehrung ist eine randadaptierte Karte.

15.21 Bemerkung. Sei $k \geq 2$. Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und sei X eine k-dimensionale, abgeschlossene, berandete Untermannigfaltigkeit von M.

(a) $\partial X \subseteq X$, weil $\{0\} \times \mathbb{R}^{k-1} \subseteq \mathbb{R}^k_-$. Insbesondere ist X abgeschlossen in M.

(b) Es gibt einen Atlas $\mathcal{A}$ von M, so dass jede lokale Parametrisierung $\varphi\colon W \to V$ aus $\mathcal{A}$ mit $V \cap \partial X \neq \emptyset$ randadaptiert bzgl. X ist. Ein solcher Atlas heißt *randadaptiert* bzgl. X. Wenn M orientiert ist, so kann auch $\mathcal{A}$ orientiert gewählt werden.

(c) ∂X ist eine $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.

(d) Ist $\mathcal{A}$ ein orientierter, bzgl. X randadaptierter Atlas von M, so ist der zugehörige Atlas $\mathcal{A}_0$ von ∂X orientierbar. Das folgt im Fall $M = \mathbb{R}^k$ aus Satz 15.16, indem man in jedem Punkt die äußere Normale wählt.

16. Differentialformen

16.1 Bezeichnung. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, so bezeichnet $\mathfrak{V}(U)$ die Menge aller C^∞-Abbildungen $F\colon U \to \mathbb{R}^3$. Die Komponentenabbildungen bezeichnen wir mit F_j, $j = 1, 2, 3$, also $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$. Die Elemente von $\mathfrak{V}(U)$ heißen *glatte Vektorfelder* auf U. Man hat lineare Abbildungen

$$C^\infty(U) \xrightarrow{\text{grad}} \mathfrak{V}(U) \xrightarrow{\text{rot}} \mathfrak{V}(U) \xrightarrow{\text{div}} C^\infty(U)$$

wobei

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(f) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right),\\
\operatorname{rot}(F) &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right),\\
\operatorname{div}(F) &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}.
\end{aligned}$$

Es gilt $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$ und $\operatorname{div}\operatorname{rot} F = 0$.

Ist U konvex, so kann man zeigen: Zu jedem F mit $\operatorname{rot} F = 0$ gibt es ein f mit $\operatorname{grad} f = F$ und zu jedem F mit $\operatorname{div} F = 0$ gibt es ein G mit $\operatorname{rot} G = F$.

Diesen Kalkül wollen wir für höhere Dimensionen verallgemeinern.

16.2 Bezeichnung. $e_1, \dots, e_n$ bezeichne die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Es sei $(\mathbb{R}^n)^*$ der Dualraum von $\mathbb{R}^n$, also der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann bilden $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ eine Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$, wobei

$$\Delta_i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j,\\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

16.3 Definition. Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine *alternierende* k-*Form* auf dem $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $\omega\colon (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ mit

(a) ω ist linear in jedem Argument.

(b) für $i \neq j$ gilt $\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots)$, wenn alle anderen Argumente unverändert bleiben.

Die alternierenden k-Formen auf $\mathbb{R}^n$ bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$. Man setzt $\Lambda^0(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^*$.

16.4 Beispiel. (a) $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)^* = (\mathbb{R}^n)^*$.

(b) Durch $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \det(v_1, \dots, v_n)$ erhält man eine alternierende n-Form auf dem $\mathbb{R}^n$.

(c) Ein Beispiel einer konkreten 2-Form auf dem $\mathbb{R}^3$ liefert

$$\omega\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

16.5 Bemerkung. Die Bedingung (b) in Definition 16.3 ist äquivalent zu

(b*) $\omega(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$.

16.6 Definition. Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in (\mathbb{R}^n)^*$, so definiert man $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ durch

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det\left((\varphi_i(v_j))_{i,j=1,\dots,k}\right).$$

16.7 Beispiel. Die 2-Form aus dem letzten Beispiel ist gleich $\Delta_1 \wedge \Delta_2$.

16.8 Bezeichnung. Ist $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, also $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, so setzt man

$$\begin{aligned} |I| &= k, \\ e_I &= (e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \in (\mathbb{R}^n)^k, \\ \Delta_I &= \Delta_{i_1} \wedge \dots \wedge \Delta_{i_k} \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*. \end{aligned}$$

16.9 Bemerkung. (a) Sind $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|I| = |J|$, so gilt

$$\Delta_I(e_J) = \begin{cases} 1, & I = J, \\ 0, & I \neq J. \end{cases}$$

(b) $\Delta_\emptyset = \mathrm{id}_\mathbb{R} \in \Lambda^0(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^*$.

16.10 Satz. *Die Δ_I mit $|I| = k$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$. Insbesondere* $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* = \binom{n}{k}$ *und* $\lambda^k(\mathbb{R}^n)^* = \{0\}$ *für* $k > n$.

Beweis. Wird in der Linearen Algebra II gezeigt, bei Herrn Bogopolski als Satz 13.1.16. □

16.11 Definition. Für $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$, $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ und $J = \{j_1, \dots, j_h\}$ mit $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_h \leq n$ setzen wir

$$\Delta_I \wedge \Delta_J = \Delta_{i_1} \wedge \dots \wedge \Delta_{i_k} \wedge \Delta_{j_1} \wedge \dots \wedge \Delta_{j_h}.$$

Daraus konstruiert man eine Verknüpfung

$$\wedge\colon \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \times \Lambda^h(\mathbb{R}^n)^* \to \Lambda^{k+h}(\mathbb{R}^n)^*,$$
$$\Big(\sum_{|I|=k} a_I\Delta_I\Big) \wedge \Big(\sum_{|J|=h} b_J\Delta_J\Big) = \sum_{I,J} a_I b_J \Delta_I \wedge \Delta_J.$$

16.12 Beispiel. (a) $\Delta_{\{1,3\}} \wedge \Delta_{\{2\}} = -\Delta_{\{1,2,3\}}$.

(b) $\Delta_I \wedge \Delta_J = 0$ falls $I \cap J \neq \emptyset$.

16.13 Satz. *Die Verknüpfung $\wedge$ ist bilinear, assoziativ und graduiert kommutativ. Letzteres bedeutet*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kh}\eta \wedge \omega \quad \textit{für } \omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \textit{ und } \eta \in \Lambda^h(\mathbb{R}^n)^*.$$

Beweis. Wird in der Linearen Algebra II bewiesen, beispielsweise bei Herrn Bogopolski in Satz 13.1.12. □

16.14 Definition. (a) Sei U offen im $\mathbb{R}^n$. Eine *Differentialform der Ordnung* k oder k-*Form* ist eine Abbildung

$$\omega\colon U \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*.$$

Insbesondere sind die 0-Formen gerade die Funktionen $U \to \mathbb{R}$.

(b) Die konstante Differentialform $x \mapsto \Delta_I$ wird mit dx_I bezeichnet. Statt $dx_{\{i\}}$ schreibt man dx_i.

16.15 Definition. Eine Differentialform ω der Ordnung k auf U ist von der Form

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen f_I. Man sagt, ω sei stetig bzw. von der Klasse C^p, wenn alle f_I diese Eigenschaft haben. Eine *glatte* Differentialform ist eine Differentialform von der Klasse C^∞. Mit $\Omega^k(U)$ bezeichnen wir den $\mathbb{R}$-Vektorraum der glatten k-Formen auf U.

16.16 Bemerkung. (a) Die Summe von zwei k-Formen ist dabei wie folgt erklärt: Ist $\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$ und $\eta = \sum_{|I|=k} b_I dx_I$, so ist $\omega + \eta = \sum_{|I|=k}(f_I + g_I)dx_I$.

(b) Für eine k-Form ω und eine h-Form η ist das äußere Produkt erklärt durch $(\omega \wedge \eta)(x) = \omega(x) \wedge \eta(x)$.

(c) Es gilt $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, speziell $dx_i \wedge dx_i = 0$.

16.17 Definition. Sei $\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$ eine glatte k-Form auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Die $(k+1)$-Form

$$d\omega = \sum_{|I|=k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$$

bezeichnet man als *äußere Ableitung* von ω.

16.18 Beispiel. (a) $U = \mathbb{R}^3$ und ω sei die 3-Form $x \mapsto (3x_1 + 4x_2^2) dx_1 \wedge dx_3$. Dann $d\omega(x) = -8x_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

(b) Sei ω die 0-Form $x \mapsto x_i$. Dann $d\omega = dx_i$.

(c) Sei ω eine glatte 0-Form, also $\omega(x) = f(x)$. Dann $d\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$, was man mit dem Gradienten identifizieren kann.

16.19 Bemerkung. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Man hat das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(U) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, "="] & \mathfrak{V}(U) \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, "\varphi_1"', "\cong"] & \mathfrak{V}(U) \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\varphi_2"', "\cong"] & C^\infty(U) \arrow[d, "\varphi_3"', "\cong"] \\
\Omega^0(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^2(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^3(U)
\end{tikzcd}$$

Dabei sind die Vektorraumisomorphismen φ_1, φ_2, φ_3 gegeben durch

$$\begin{aligned}
\varphi_1(f_1, f_2, f_3) &= f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz, \\
\varphi_2(f_1, f_2, f_3) &= f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy, \\
\varphi_3(f) &= f dx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

16.20 Bemerkung. (a) Die Abbildung $d\colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ ist linear.

(b) Für $\omega \in \Omega^k(U)$ und $\eta \in \Omega^h(U)$ gilt

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

Der folgende Satz ist eine Folgerung des Satzes von H. A. Schwarz (Analysis II, Satz 7.2)

16.21 Satz. *Ist ω eine Differentialform von der Klasse C^2, so gilt* $d(d\omega) = 0$.

16.22 Definition. Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn es ein $x_0 \in U$ gibt, so dass für jedes $x \in U$ die Verbindungsstrecke zwischen x und x_0 in U liegt.

Bemerkung. Konvexe Mengen sind sternförmig.

16.23 Bezeichnung. Für $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ sei

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = dx_{I \setminus \{i_\ell\}}.$$

16.24 Satz (Lemma von Poincaré). *Sei* U *eine offene, sternförmige Teilmenge des* $\mathbb{R}^n$, *sei* $k \in \mathbb{N}$ *und sei* $\omega \in \Omega^k(U)$ *mit* $d\omega = 0$. *Dann existiert* $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ *mit* $d\eta = \omega$.

16.25 Definition. Sei U offen im $\mathbb{R}^n$, sei V offen im $\mathbb{R}^m$, sei $\varphi\colon V \to U$ glatt. Wir bezeichnen mit φ_i die i-te Komponentenfunktion von φ, also $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $\omega \in \Omega^k(U)$, $\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} f_{i_1,\dots,i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, eine k-Form. Dann ist

$$\varphi^*(\omega) = \sum_{i_1<\dots<i_k} (f_{i_1,\dots,i_k} \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k} \in \Omega^k(V)$$

die mit φ *zurückgezogene* Differentialform.

16.26 Beispiel. $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}$, $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, und $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ sei gegeben durch $\omega = xy^2 dx + y\, dy$. Dann $d\varphi_1 = -\sin(t)dt$ und $d\varphi_2 = \cos(t)dt$. Daher

$$\begin{aligned}\varphi^*(\omega) &= \cos(t)\sin^2(t)(-\sin(t))dt + \sin(t)\cos(t)dt \\ &= \sin(t)\cos(t)(1-\sin(t)^2)dt = \sin(t)\cos(t)^3 dt.\end{aligned}$$

16.27 Satz. *Es gelten*

(a) φ^* *ist linear.*

(b) Ist $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$, *dann* $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$.

(c) $\varphi^*(f\omega) = (f \circ \varphi)\varphi^*(\omega)$.

(d) $\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\eta)$.

(e) $d(\varphi^*(\omega)) = \varphi^*(d\omega)$.

(f) $\psi^*(\varphi^*(\omega)) = (\varphi \circ \psi)^*(\omega)$.

16.28 Bemerkung. (a) Die Abbildung $\varphi \mapsto \varphi^*$ ist durch die Eigenschaften (a)–(e) eindeutig bestimmt. Bezeichnet man mit $p_i\colon x \mapsto x_i$ die Projektion auf die i-te Koordinate, so stellt sich das entscheidende Argument wie folgt dar

$$\varphi^*(dx_i) = d(\varphi^*(p_i)) = d(p_i \circ \varphi) = d\varphi_i.$$

(b) Falls $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi\colon U \to V$ glatt, so gilt

$$\varphi^*(f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = (f \circ \varphi)\det(D\varphi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

17. Zerlegungen der Eins

17.1 Definition. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und seien $A_1, \ldots, A_m \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $X \subset A_1 \cup \cdots \cup A_m$. Man sagt, dass die Funktionen $g_1, \ldots, g_m \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine *glatte Zerlegung der Eins auf* X bilden, welcher der Überdeckung $A_1, \ldots, A_m$ untergeordnet ist, wenn gilt:

(a) Alle g_j sind von der Klasse C^∞.

(b) $g_j(x) \geq 0$ für alle x und alle j.

(c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} g_j(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} g_j(x) = 1$ für alle $x \in X$.

(e) Für alle j ist $\operatorname{Supp}(g_j)$ kompakt und in A_j enthalten.

17.2 Bemerkung. (a) Wir hatten in der Analysis I gesehen, dass durch die folgende Vorschrift eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ gegeben wird

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(b) Dann ist $g(x) = f(1 - x^2)$ eine Funktion in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{Supp}(g) = [-1, 1]$ und $g(x) > 0$ für $-1 < x < 1$. Das brauchen wir mehrdimensional.

17.3 Satz. *Sei* $X \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt und seien* $A_1, \ldots, A_m \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen mit* $X \subset A_1 \cup \cdots \cup A_m$*. Dann existiert eine der Überdeckung* $A_1, \ldots, A_m$ *untergeordnete, glatte Zerlegung der Eins.*

18. Integration von Formen

18.1 Bemerkung. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann ist M eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Ferner besitzt M einen Atlas, der aus der einzigen Karte id_M besteht, ist also insbesondere orientierbar. In Zukunft werden wir immer diesen Atlas benutzen, wenn wir eine n-Form auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ betrachten.

18.2 Definition. In der Situation von Bemerkung 18.1 seien $A \subset M$ kompakt und $\omega \in \Omega^n(M)$. Dann ist ω von der Gestalt $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ und wir setzen

$$\int_A \omega = \int_A f \, d\lambda^n.$$

18.3 Definition. Sei M eine orientierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$. Wenn ein orientierter Atlas $\mathcal{A}$ von M gewählt wurde, so ist M *orientiert.* Eine Karte φ derart, dass $\tau_{\varphi,\psi}$ für jedes $\psi \in \mathcal{A}$ orientierungstreu ist, bezeichnet man als *positiv orientiert.*

18.4 Definition. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $M \subseteq U$ eine n-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit, $A \subseteq M$ kompakt und $\omega \in \Omega^n(U)$. Es gebe ferner eine positiv orientierte Karte $\varphi\colon V \to W$ von M mit $A \subseteq V$. Dann setzen wir

$$\int_A \omega = \int_{\psi^{-1}(A)} \psi^*(\omega), \tag{18.1}$$

wobei $\psi := \varphi^{-1}$ die zugehörige lokale Parametrisierung ist.

Bemerkung. Sei $M = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^N$. Dann ist $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to M$, $x \mapsto (x, 0)$, eine lokale Parametrisierung. Wir legen fest, dass sie positiv orientiert ist. Sei $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^N)$ von der speziellen Gestalt $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge x_n$. Dann $\varphi^*(\omega) = f\, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$ und wir haben für jedes kompakte $A = B \times \{0\} \subseteq M$

$$\int_A \omega = \int_B f(y_1, \ldots, y_n, 0, \ldots, 0) d\lambda^n(y).$$

Wenn wir annehmen, dass f kompakten Träger hat und die Komponenten wieder alle mit x_j bezeichnen, dann

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} f(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

18.5 Satz. *Das Integral in (18.1) hängt nicht von der Wahl der Karte φ ab.*

18.6 Lemma. *Sei M eine orientierte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und sei $A \subseteq M$ kompakt. Dann gibt es Karten $\varphi_j \colon V_j \to W_j$, $j = 1, \dots, m$ von M, so dass $A \subseteq \bigcup_{j=1}^m V_j$.*

18.7 Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, sei M eine n-dimensionale, orientierte Untermannigfaltigkeit, sei $A \subseteq M \cap U$ kompakt und sei $\omega \in \Omega^n(U)$. Seien ferner $V_1, \dots, V_m$ wie in Lemma 18.6 und sei $(g_j)_{j=1,\dots m}$ eine der Überdeckung $V_1, \dots, V_m$ untergeordnete Zerlegung der Eins auf A. Dann setzen wir

$$\int_A \omega = \sum_{j=1}^m \int_{\operatorname{Supp}(g_j) \cap A} g_j \cdot \omega.$$

18.8 Satz. *Obige Definition ist unabhängig von der Wahl der Karten und der Zerlegung.*

18.9 Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^N$ eine n-dimensionale, orientierte Untermannigfaltigkeit, sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $P \subseteq T$ kompakt und sei $\varphi \colon T \to M$ glatt. Wir bezeichnen φ als *Parametrisierung* von M, wenn

(a) $\varphi(P) = M$.

(b) Die Einschränkung $\varphi \colon \mathring{P} \to M$ ist eine positiv orientierte lokale Parametrisierung von M.

(c) $\lambda^n(\partial P) = 0$.

18.10 Satz. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, sei $M \subseteq U$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit und sei $\varphi \colon T \to M$ eine Parametrisierung von M. Es sei $A \subseteq M$ kompakt und es sei $\omega \in \Omega^n(U)$. Dann*

$$\int_A \omega = \int_{\varphi^{-1}(A) \cap \mathring{P}} \varphi^*(\omega), \tag{18.2}$$

wobei $\mathring{P} := P \setminus \partial P$ das Innere von P bezeichnet.

18.11 Beispiel. Seien $U = \mathbb{R}$, $P = [0, 2\pi]$, und sei $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\varphi(t) = \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$. Dann ist φ eine Parametrisierung der S^1. Die Koordinaten heißen x und y. Wir berechnen $\int_{S^1} x^2 dy$.

Es ist

$$\varphi^*(x^2 dy)(t) = \cos(t)^2 \frac{d \sin(t)}{dt} dt = \cos(t)^3 dt.$$

Also

$$\int_{S^1} x^2 dy = \int_{]0,2\pi[} \varphi^*(x^2 dy) = \int_{]0,2\pi[} \cos(t)^3 d\lambda^1(t) = 0.$$

Bemerkung. In diesem Kapitel wurde nicht verwendet, dass ω glatt ist. Stetigkeit hätte beispielsweise gereicht.

19. Der Satz von Stokes

19.1 Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, sei $M \subseteq U$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit und sei $\omega \in \Omega^n(U)$ von der Form $\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_n} f_{i_1,\ldots,i_n} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$. Dann ist der *Träger* von ω definiert als $\operatorname{Supp}(\omega) = \bigcup_{i_1 < \cdots < i_n} \operatorname{Supp}(f_{i_1,\ldots,i_n})$.

Bemerkung. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine orientierte Untermannigfaltigkeit der Dimension n und sei $X \subset M$ eine berandet Untermannigfaltigkeit derselben Dimension. Dann ist ∂X eine orientierte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ der Dimension $n-1$. Sei $a \in \partial X$ und sei $\varphi \colon V \to W$ eine randadaptierte Karte von M. Dann gilt $\varphi(V \cap \partial X) = W \cap \partial \mathbb{R}^N_- = \{(0, y_2, \ldots, y_n) \in W\}$. Macht man für $x \in V \cap \partial X$ die Definition $\psi(x) := (y_2, \ldots, y_n)$, wobei $\varphi(x) = (0, y_2, \ldots, y_n)$ so ist ψ eine Karte von ∂X. Wir legen fest, dass diese Karte positiv ist.

Im Fall $X := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\} \subset M := \mathbb{R}^3$, also $\partial X = S^2$, entspricht diese Definition der Anschauung. Bei Rändern von dreidimensionalen Gebieten ist die positive Orientierung diejenige, bei der die Ableitung der lokalen Parametrisierung nach der ersten Variablen, die Ableitung nach der zweiten und die äußere Normale ein rechtshändiges Dreibein bilden.

Eine randadaptierte Karte in einer Umgebung des Nordpols wird gegeben durch

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Für $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in X$ gilt dann nämlich $\varphi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3_-$. Wegen

$$D\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und daher $\det\left(D\varphi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)\right) = 2z > 0$ ist φ also in der Tat eine mit dem orientierten Atlas id_M verträgliche Karte. Die zugehörige lokale Parametrisierung ist

$$\rho\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}.$$

Die Ableitungen nach den beiden Variablen sind

$$v_1 = \frac{\partial\rho}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} \text{und} v_2 = \frac{\partial\rho}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}.$$

Ein Vektor, der diese beiden Vektoren zu einem Dreibein ergänzt, ist

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das ist in der Tat eine äußere Normale an X.

19.2 Lemma. *Wenn* $\omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ *kompakten Träger hat, dann*

$$\int_{\mathbb{R}^n_-} d\omega = \int_{\partial\mathbb{R}^n_-} \omega.$$

19.3 Bemerkung. Der Beweis zeigt, dass $\int_{\partial\mathbb{R}^n_-} f\, dx_I = 0$, falls $1 \in I$.

19.4 Korollar. *Die Differentialform* $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ *habe kompakten Träger. Dann* $\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0$.

19.5 Theorem (Integralsatz von Stokes). *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^N$ *offen, sei* $M \subseteq U$ *eine orientierte,* n*-dimensionale Untermannigfaltigkeit und sei* $\omega \in \Omega^{n-1}(U)$. *Sei* X *eine* n*-dimensionale, abgeschlossene, berandete Untermannigfaltigkeit von* M. *Es sei* X *kompakt, und* ∂X *trage die induzierte Orientierung. Dann*

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega.$$

Bemerkung. Die Version des Satzes von Stokes mit $n = N$ bezeichnet man auch als *Gaußschen Integralsatz:*

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ *eine kompakte, berandete* n*-dimensionale Untermannigfaltigkeit, sei* U *eine offene Obermenge von* X *und sei* $\omega \in \Omega^{n-1}(U)$. *Dann gilt* $\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega$.

19.6 Definition. Eine Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^N$ heißt *geschlossen,* wenn sie kompakt und ohne Rand ist.

19.7 Korollar. *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^N$ *offen und* $\omega \in \Omega^{n-1}(U)$. *Wenn* $M \subseteq U$ *eine geschlossene, orientierte,* n*-dimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^N$ *ist, dann*

$$\int_M d\omega = 0.$$

19.8 Beispiel. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte, berandete n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit der Standardorientierung. Für $\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$ gilt $d\omega = n dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Daher folgt aus dem Satz von Stokes

$$\lambda^n(X) = \frac{1}{n} \int_{\partial X} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

19.9 Beispiel. Wir integrieren $\omega = y(x^2+y^2+z^2)^3 dx \wedge dz$ über die S^2. Dazu verwenden wir die aus den Kugelkoordinaten gewonnene Parametrisierung

$$\psi \colon \mathbb{R}^2 \to S^2, \qquad (\varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

mit $P = [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Es gilt

$$\begin{aligned} \psi^*(\omega) &= \sin\varphi \cos\theta(-\sin\varphi\cos\theta \, d\varphi - \sin\varphi \sin\theta \, d\theta) \wedge \cos\theta \, d\theta \\ &= -\sin^2\varphi \cos^3\theta \, d\varphi \wedge d\theta. \end{aligned}$$

Also

$$\int_{S^2} \omega = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\varphi \cos^3\theta \, d\varphi \, d\theta = -\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \, d\theta = -\frac{4}{3}\pi.$$

Die S^2 berandet die abgeschlossene Einheitskugel $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$. Wir vergleichen das Ergebnis mit $\int_B d\omega$. Dazu müssen wir zuerst untersuchen, ob ψ diejenige Orientierung auf der S^2 induziert, die von der Identität von B herkommt. Sei dazu

$$\Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} (r+1)\cos\varphi\cos\theta \\ (r+1)\sin\varphi\cos\theta \\ (r+1)\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Setzt man $W = \{(r, \varphi, \theta) \mid r > -1, -\pi < \varphi < \pi, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ und $V = \mathbb{R}^3 \setminus (-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbb{R}$. Dann ist $\Phi \colon W \to V$ eine Karte. Wegen $\det(D\Phi) = (r+1)^2 \cos\theta > 0$ ist sie positive orientiert. Sie ist randadapiert und es gilt $\psi(\varphi, \theta) = \Phi(0, \varphi, \theta)$. Also induziert Φ dieselbe Orientierung auf S^2 wie ψ.

Es gilt $d\omega = -\left((x^2+y^2+z^2)^3 + 6y(x^2+y^2+z^2)^2\right) dx \wedge dy \wedge dz$. Also

$$\begin{aligned} \int_B d\omega &= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} (r^6 + 6r^6 \sin^2\varphi \cos^2\varphi) r^2 \cos\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\pi r^8 \cos\theta + 6\pi r^8 \cos^3\theta) d\varphi \, d\theta \\ &= \int_0^1 \left(4\pi r^8 + 6 \cdot \frac{4}{3}\pi r^8\right) dr = \int_0^1 12\pi r^8 dr = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

20. Die klassischen Integralsätze

20.1 Satz (Satz von Gauß für die Ebene). *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *offen, sei* $X \subseteq U$ *eine kompakte, berandete, orientierte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit und seien* $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ *glatt. Dann*

$$\int_{\partial X} (f\,dx + g\,dy) = \int_X \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) d\lambda^2.$$

20.2 Bemerkung. Das Integral über ∂X kann im zweidimensionalen Fall wie folgt als Wegintegral bestimmt werden:

Es sei $\gamma\colon]-\epsilon, 1+\epsilon[\to \partial X$ ein differenzierbarer Weg mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle t, dessen Einschränkung auf $]0,1[$ injektiv ist, so dass $\gamma([0,1]) = \partial X$. Wir zeigen, dass γ eine Parametrisierung von ∂X im Sinne von 18.9 ist. Dazu muss noch nachgewiesen werden, dass $\gamma^{-1}\colon V \to]0,1[$ für $V := \gamma(]0,1[)$ homöomorph ist. Sei dazu $A \subset]0,1[$ abgeschlossen in $]0,1[$ und sei $\overline{A}$ der Abschluss in $\mathbb{R}$. Dann ist $\overline{A}$ kompakt, daher ist auch $(\gamma^{-1})^{-1}(A) = \gamma(\overline{A}) \cap V$ abgeschlossen in V als Durchschnitt einer abgeschlossenen Menge mit V.

Der Weg γ umlaufe die Menge X in mathematisch positiver Richtung, d. h. so, dass X immer zur linken liegt, wenn man entlang γ fortschreitet. Setzt man nun $\omega = f\,dx + g\,dy$ und $u := \binom{f}{g}$, dann gilt

$$\gamma^*(\omega) = (f\circ\gamma)d\gamma_1 + (g\circ\gamma)\,d\gamma_2 = (f\circ\gamma)\gamma_1'\,dt + (g\circ\gamma)\gamma_2'\,dt = \langle u\circ\gamma, \gamma'\rangle\,dt.$$

Wegen Satz 18.10 kann man das Randintegral wie folgt als Wegintegral schreiben

$$\int_{\partial X} \omega = \int_{[0,1]} \langle u\circ\gamma, \gamma'\rangle\,d\lambda^1.$$

Um den Gaußschen Satz in höheren Dimensionen in der klassischen Form hinzuschreiben, wird ein Maß für die Oberfläche benötigt.

20.3 Bemerkung. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$. Dann ist A^TA positiv semidefinit. Es existiert also $\sqrt{\det(A^TA)} \in \mathbb{R}$.

20.4 Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^N$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit, sei $A \subset M$ kompakt, seien $\varphi_j\colon W_j \to V_j$, $j = 1, \ldots, m$, lokale Parametrisierungen von M mit $A \subset \bigcup_{j=1}^m V_j$ und sei $g_1, \ldots, g_m$ eine untergeordnete Zerlegung der Eins von A. Dann setzen wir

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(A\cap \operatorname{Supp}(g_j))} g_j\circ\varphi_j \sqrt{\det((D\varphi_j)^T D\varphi_j)}\,d\lambda^n. \tag{20.1}$$

20.5 Lemma. *Der Wert $\mu(A)$ in (20.1) hängt nicht von der Wahl der lokalen Parametrisierungen oder der Zerlegung ab.*

20.6 Bezeichnung. Aus dem Maßfortsetzungssatz folgt die Existenz einer σ-Algebra $\mathcal{S}_M$ und eines Maßes λ_M auf M, so dass $\lambda_M(A) = \mu(A)$ für alle kompakten Teilmengen A von M. Dabei enthält $\mathcal{S}_M$ alle Borelmengen.

Wir zitieren einen Satz aus der Linearen Algebra II

20.7 Satz (Binet-Cauchy). *Für $A \in K^{n\times m}$ und $B \in K^{m\times n}$ und $n \leq m$ ist*

$$\det(AB) = \sum_{\substack{L\subseteq\{1,\dots,m\}\\|L|=n}} \det\left((a_{j,\ell})_{\substack{j=1,\dots,n\\ \ell\in L}}\right)\det\left((b_{\ell,j})_{\substack{j=1,\dots,n\\ \ell\in L}}\right).$$

Beispiel. $A = \left(\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{smallmatrix}\right)$, $B = \begin{pmatrix}1&0\\2&1\\3&2\end{pmatrix}$.

20.8 Satz. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit, sei $A \subseteq M$ kompakt, seien $\varphi_j\colon W_j \to V_j$, $j = 1,\dots,m$, lokalen Parametrisierungen von M mit $A \subset \bigcup_{j=1}^m V_j$ und sei $g_1,\dots,g_m$ eine untergeordnete Zerlegung der Eins von A. Dann*

$$\lambda_M(A) = \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(A)} g_j \circ \varphi_j \left\| \frac{\partial\varphi_j}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\right\|_2 d\lambda^2.$$

20.9 Beispiel. Im Fall $n = 2$ bezeichnet man das Maß $d\lambda_M$ auch als *Oberflächenmaß.* Wir berechnen das Oberflächenmaß der S^2 in Kugelkoordinaten

$$\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to S^2, \quad (\varphi,\theta) \mapsto \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}.$$

Dann

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi\cos\theta\\ 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-\cos\varphi\cos\theta\\ -\sin\varphi\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos^2\theta\\ \sin\varphi\cos^2\theta\\ \sin\theta\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Also mit doppelter Anwendung des trigonometrischen Pythogoras

$$\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right\|_2 = \sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta.$$

20.10 Satz. *Sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ λ_M-integrierbar. Dann*

$$\int f\, d\lambda_M = \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(\mathrm{Supp}(g_j))} (g_j\circ\varphi_j)(f\circ\varphi_j)\sqrt{\det((D\varphi_j)^T D\varphi_j)}\, d\lambda^n.$$

Bemerkung. Wir hatten den Normalenraum $N_a(M)$ an eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ in einem Punkt $a \in M$ als das Orthogonalkomplement von $T_a(M)$ definiert. Wenn X eine berandete, n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist, dann $\dim N_a(\partial X) = 1$ für alle $a \in \partial X$, es gibt also genau zwei Einheitsnormalen, die wir als *innere* und *äußere* Einheitsnormale bezeichnen.

Sei nun $n = 3$ und sei $\Phi\colon W \to V$ eine randadaptierte lokale Parametrisierung von X. Wir bezeichnen die Koordinaten des $\mathbb{R}^3$ mit (t, x, y). Dann ist $\varphi\colon (x, y) \mapsto \Phi(0, x, y)$ eine positiv orientierte lokale Parametrisierung von ∂X. Sei ξ, η bestimmt durch $\varphi(\xi, \eta) = a$. Dann ist

$$\nu_a = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,\xi,\eta) \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,\xi,\eta)\right\|_2} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,\xi,\eta) \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,\xi,\eta)$$

der äußere Einheitsnormalenvektor. Um zu sehen, dass es sich um den äußeren handelt, setzen wir $g(s) = \langle \nu_a, \Phi(s,\xi,\eta)\rangle$ und $c = \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,\xi,\eta) \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,\xi,\eta)\right\|_2$. Dann

$$g'(0) = \frac{1}{c}\left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial x}(0,\xi,\eta) \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}(0,\xi,\eta),\ \frac{\partial\Phi}{\partial t}(0,\xi,\eta)\right\rangle = \frac{1}{c}\det(D\Phi(0,\xi,\eta)) > 0.$$

Also zeigt ν_a in der Tat aus X hinaus. Die Abbildung $\nu\colon \partial X \to \mathbb{R}^3$, $a \mapsto \nu_a$, ist das *nach außen gerichtete Einheitsnormalenfeld.*

20.11 Theorem (Divergenzsatz). *Sei* U *offen im* $\mathbb{R}^3$, *sei* $X \subset U$ *eine kompakte, dreidimensionale, berandete Untermannigfaltigkeit und sei* $F\colon U \to \mathbb{R}^3$ *ein glattes Vektorfeld. Sei* ν *das nach außen gerichtete Einheitsnormalenfeld auf* ∂X. *Dann*

$$\int_X \operatorname{div}(F)\, d\lambda^3 = \int_{\partial X} \langle F, \nu\rangle\, d\lambda_{\partial X}.$$

20.12 Definition. Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(U)$ bezeichnet $\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$ den *Laplace-Operator.*

20.13 Satz (Erste Greensche Formel). *Sei* U *offen im* $\mathbb{R}^3$, *sei* $X \subset U$ *eine kompakte, dreidimensionale, berandete Untermannigfaltigkeit, und es seien* $\varphi, \psi \in C^\infty(U)$. *Sei* ν *das nach außen gerichtete Einheitsnormalenfeld auf* ∂X. *Dann gilt*

$$\int_X \varphi\, \Delta(\psi) d\lambda^3 = -\int_X \langle \nabla\varphi, \nabla\psi\rangle\, d\lambda^3 + \int_{\partial X} \varphi\, \langle \nabla\psi,\ \nu\rangle\, d\lambda_{\partial X}.$$

20.14 Satz (Zweite Greensche Formel). *Sei* U *offen im* $\mathbb{R}^3$, *sei* $X \subset U$ *eine kompakte, dreidimensionale, berandete Untermannigfaltigkeit, und es seien* $\varphi, \psi \in C^\infty(U)$. *Sei* ν *das nach außen gerichtete Einheitsnormalenfeld auf* ∂X. *Dann gilt*

$$\int_X (\varphi\, \Delta(\psi) - \psi\Delta(\varphi))\, d\lambda^3 = \int_{\partial X} (\varphi\, \langle \nabla\psi,\ \nu\rangle - \psi\, \langle \nabla\varphi,\ \nu\rangle)\, d\lambda_{\partial X}.$$

Bemerkung. Verschiedene Abschwächungen der Regularitätsvoraussetzungen sind möglich. Beim Divergenzsatz genügt beispielsweise ein Vektorfeld der Klasse C^1. Der Rand von X braucht auch keine glatte Mannigfaltigkeit zu sein. Der Divergenzsatz und die Greenschen Formeln gelten beispielsweise auch auf Polyedern. Dieser Zugang wird in dem Buch von Kaballo verfolgt.