Analysis III

Rüdiger W. Braun

Wintersemester 2012/13*

*Dieses Skript beruht zu großen Teilen auf der Vorlesung von Wilhelm Singhof aus dem Wintersemester 2010/11

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Maß- und Integrationstheorie

1. Quader und Figuren

1.1 Bezeichnung. Die *Potenzmenge* einer Menge X wird mit $\mathcal{P}(X)$ bezeichnet.

1.2 Definition. Für $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$ im $\mathbb{R}^n$ definiert man

$$\begin{aligned} a \le b &\iff a_i \le b_i \text{ für } 1 \le i \le n, \\ a < b &\iff a_i < b_i \text{ für } 1 \le i \le n. \end{aligned}$$

Ist $a \le b$, so definiert man $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \le x < b\}$. Die Menge $[a, b[$ ist ein halboffener, achsenparalleler *Quader* im $\mathbb{R}^n$. Die Menge aller Quader im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet man mit $\mathcal{Q}^n$.

Für $[a, b[\in \mathcal{Q}^n$ ist

$$\lambda^n([a, b[) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

das *Volumen* von $[a, b[$.

Eine Vereinigung von endlich vielen Quadern im $\mathbb{R}^n$ heißt *Figur* in $\mathbb{R}^n$. Es sei $\mathcal{F}^n$ die Menge aller Figuren im $\mathbb{R}^n$.

1.3 Lemma. *Jede Figur ist disjunkte Vereinigung von endlich vielen Quadern.*

1.4 Definition. Seien X eine Menge und $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{R}$ ist ein *Ring von Teilmengen* von X, wenn

(a) $\emptyset \in \mathcal{R}$.

(b) Sind $A, B \in \mathcal{R}$, so ist $A \cup B \in \mathcal{R}$.

(c) Sind $A, B \in \mathcal{R}$, so ist $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

1.5 Satz. *$\mathcal{F}^n$ ist ein Ring von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.*

1.6 Definition. Seien X eine Menge und $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen von X. Eine Abbildung $\mu \colon \mathcal{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist ein *Prämaß* auf $\mathcal{R}$, wenn

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) $\mu(A) \ge 0$ für alle $A \in \mathcal{R}$.

(c) Sind $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkt und ist $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{R}$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m).$$

1.7 Lemma. *Wir setzen*

$$\nu([a,b[) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) \quad \textit{für alle } [a,b[\in \mathcal{Q}^n.$$

Sei $Q \in \mathcal{Q}^n$ *disjunkte Vereinigung endlich vieler Quader* $P_1, \dots, P_m \in \mathcal{Q}^n$. *Dann*

$$\nu(Q) = \sum_{j=1}^{m} \nu(P_j).$$

1.8 Satz. *Es gibt genau ein Prämaß* λ^n *auf* $\mathcal{F}^n$ *mit*

$$\lambda^n([a,b[) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n) \quad \textit{für alle } [a,b[\in \mathcal{Q}^n.$$

2. σ-Algebren und Maße

2.1 Definition. Es sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ist eine *σ-Algebra*, wenn

(a) $\mathcal{A}$ ist ein Ring von Teilmengen von X.

(b) $X \in \mathcal{A}$.

(c) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, dann $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{A}$.

2.2 Lemma. *Der Durchschnitt von beliebig vielen σ-Algebren ist eine σ-Algebra in* X.

2.3 Satz. *Zu jeder Teilmenge* $\mathcal{T}$ *von* $\mathcal{P}(X)$ *gibt es eine kleinste σ-Algebra* $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ *in* X*, die* $\mathcal{T}$ *enthält.*

2.4 Beispiel. Sei X ein metrischer Raum, $\mathcal{T}$ die Menge aller offenen Teilmengen von X. Die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{T}$ umfasst, ist die σ-Algebra der *Borel-Mengen* von X. Sie wird mit $\mathcal{B}(X)$ bezeichnet.

2.5 Definition. Ein Prämaß auf einer σ-Algebra bezeichnet man als *Maß* auf $\mathcal{A}$.

2.6 Definition. (a) Ein Paar $(X, \mathcal{A})$ aus einer Menge X und einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf X bezeichnet man als *Messraum.*

(b) Ein Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ aus einer Menge X, einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf X und einem Maß μ auf $\mathcal{A}$ bezeichnet man als *Maßraum.*

2.7 Bemerkung. Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, und sind $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset X$ messbar, so ist $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ messbar mit $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

2.8 Definition. Ein *äußeres Maß* auf einer Menge X ist eine Abbildung $\eta\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\eta(\emptyset) = 0$.

(b) Für alle $A \subset B \subset X$ gilt $\eta(A) \leq \eta(B)$.

(c) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen von X gilt $\eta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n)$.

2.9 Bemerkung. (a) Wir werden zeigen, dass ein äußeres Maß ein Maß auf einer geeigneten σ-Algebra ist, allerdings nicht notwendig auf $\mathcal{P}(X)$.

(b) Die folgende Abbildung ist ein äußeres Maß

$$\eta(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ 1, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$

2.10 Definition. Es sei $\eta\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein äußeres Maß. Eine Menge $A \subset X$ heißt η-*messbar*, wenn für jedes $Q \subset X$ gilt

$$\eta(Q) \geq \eta(Q \cap A) + \eta(Q \setminus A).$$

2.11 Bemerkung. (a) Jedes A mit $\eta(A) = 0$ oder $\eta(X \setminus A) = 0$ ist η-messbar.

(b) A ist genau dann η-messbar, wenn für jedes Q mit $\eta(Q) < \infty$ gilt $\eta(Q) \geq \eta(Q \cap A) + \eta(Q \setminus A)$.

(c) A ist genau dann η-messbar, wenn für jedes Q gilt $\eta(Q) = \eta(Q \cap A) + \eta(Q \setminus A)$.

2.12 Satz (Carathéodory 1914). *Ist $\eta\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein äußeres Maß, so ist*

$$\mathcal{A}_\eta = \{A \subset X \mid A \textit{ ist } \eta\textit{-messbar}\}$$

eine σ-Algebra, und die Einschränkung von η auf $\mathcal{A}_\eta$ ist ein Maß.

2.13 Satz. *Seien X eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen von X und μ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$. Für beliebiges $A \subset X$ setze*

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_k) \;\Big|\; \forall k \in \mathbb{N} : B_k \in \mathcal{R},\, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big\}$$

(dabei $\inf \emptyset = \infty$). Dann ist μ^* ein äußeres Maß auf X und alle Mengen aus $\mathcal{R}$ sind μ^*-messbar.

2.14 Theorem (Maßfortsetzungssatz von Carathéodory). *Seien X eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen von X und μ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$. Dann kann μ zu einem Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ fortgesetzt werden.*

2.15 Definition. Ein Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$ von Teilmengen von X heißt σ-endlich, wenn es eine Folge $E_1, E_2, \dots$ in $\mathcal{R}$ gibt, so dass

(a) $E_1 \subset E_2 \subset \dots$

(b) $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$.

(c) $\mu(E_m) < \infty$ für alle m.

2.16 Satz. *Ist $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen einer Menge X und μ ein σ-endliches Prämaß auf $\mathcal{R}$, so ist das nach Theorem 2.14 existierende Maß eindeutig bestimmt.*

Bevor ich im nächsten Abschnitt das Lebesgue-Maß einführe, erwähne ich zwei Maße, die man ohne den Fortsetzungssatz bekommt.

2.17 Beispiel. (a) Sei X eine beliebige Menge. Für jede Teilmenge M von X sei $\mu(M)$ die Anzahl der Elemente von M. Dann ist $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ ein Maßraum. Das Maß μ ist das *Zählmaß* auf X.

(b) Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$\delta_a(M) = \begin{cases} 1, & a \in M, \\ 0, & a \notin M. \end{cases}$$

Dann ist $(\mathbb{R}^n, \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \delta_a)$ ein Maßraum. Das Maß δ_a bezeichnet man als *Dirac-Maß*.

3. Das Lebesgue-Maß

3.1 Satz. *Sei $\mathcal{A}(\mathcal{F}^n)$ die von den Figuren erzeugte σ-Algebra. Dann $\mathcal{A}(\mathcal{F}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

3.2 Definition. Sei λ^n das in Satz 1.8 auf $\mathcal{F}^n$ erklärte Prämaß, und sei $(\lambda^n)^*$ das zugehörige äußere Maß. Die σ-Algebra $\mathcal{A}_{(\lambda^n)^*}$ besteht aus den *Lebesgue-messbaren* Mengen. Man bezeichnet sie mit $\mathcal{L}^n$. Die Einschränkung von $(\lambda^n)^*$ auf $\mathcal{L}^n$ wird wieder mit λ^n bezeichnet.

Bemerkung. Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit metrischem X und $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$, dann bezeichnet man μ als *Borelmaß.* Das Lebesgue-Maß ist ein Borelmaß.

3.3 Satz. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann sind äquivalent:*

(a) $A \in \mathcal{L}^n$.

(b) Zu jedem $j \in \mathbb{N}$ gibt es $F_j, G_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, so dass $F_j \subset A \subset G_j$ und $\lambda^n(G_j \backslash F_j) < \frac{1}{j}$. Dabei ist G_j abzählbare Vereinigung von Quadern, und F_j ist abzählbarer Durchschnitt von Figuren.

(c) Es gibt $F, G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $F \subset A \subset G$ und $\lambda^n(G \setminus F) = 0$.

Im Fall (c) gilt $\lambda^n(A) = \lambda^n(F) = \lambda^n(G)$.

3.4 Korollar. *Seien $-\infty < a_j < b_j < \infty$ für $j = 1, \dots, n$. Sei $\prod_{j=1}^n (a_j, b_j) \subset M \subset \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$. Dann ist M Lebesgue-messbar mit $\lambda^n(M) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$.*

3.5 Definition. Für $a \in \mathbb{R}^n$ ist $\tau_a \colon x \mapsto x + a$ die *Translationsabbildung* um den Vektor a.

Ein Maß μ auf dem $\mathbb{R}^n$ heißt *translationsinvariant*, wenn für jedes $a \in \mathbb{R}^n$ und jede messbare Menge A auch $\tau_a(A)$ messbar ist mit $\mu(A) = \mu(\tau_a(A))$.

Das Lebesgue-Maß ist translationsinvariant.

3.6 Satz. *Sei μ ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) μ ist translationsinvariant.

(b) Es gibt eine beschränkte Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit nichtleerem Inneren, so dass $0 < \mu(B) < \infty$.

Dann gibt es ein $C \in (0, \infty)$*, so dass* $\mu(A) = C\lambda^n(A)$ *für alle* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

3.7 Definition. Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *orthogonal*, wenn M invertierbar ist mit $M^T = M^{-1}$. (Hierbei ist M^T die Transponierte von M.) Die Menge aller orthogonalen $n \times n$-Matrizen wird mit $O(n)$ bezeichnet.

3.8 Lemma. *Jede Matrix* $M \in GL(\mathbb{R}, n)$ *lässt sich schreiben als* $M = S_1 D S_2$*, wobei* S_1, S_2 *orthogonale Matrizen und* D *eine Diagonalmatrix mit positiven Einträgen sind.*

3.9 Satz. *Sei* $T \in GL(\mathbb{R}, n)$*. Dann* $T(M) \in \mathcal{L}^n$ *für alle* $M \in \mathcal{L}^n$ *und* $\lambda^n(T(M)) = |\det(T)|\lambda^n(M)$ *für alle* $M \in \mathcal{L}^n$.

3.10 Definition. $H \subset \mathbb{R}^n$ ist eine *affine Hyperebene*, wenn es eine $(n-1)$-dimensionalen Unterraum V des $\mathbb{R}^n$ und ein $a \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $H = V + a = \{a + v \mid v \in V\}$.

3.11 Korollar. *Sei* H *eine affine Hyperebene im* $\mathbb{R}^n$ *und sei* $M \subset H$*. Dann gilt* $\lambda^n(M) = 0$.

3.12 Beispiel. Es gibt eine Menge $M \subset \mathbb{R}$, die nicht Lebesgue-messbar ist.

Es kommt aber noch schlimmer: Banach und Tarski haben bewiesen, dass es eine endliche Anzahl $M_1, \dots, M_n$ von Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ und $T_1, \dots, T_n \in GL(\mathbb{R}, 3)$ mit $\det(T_j) = 1$ für $j = 1, \dots, n$ gibt, so dass

$$\bigcup_{j=1}^{n} M_j = \overline{B}_1(0) \qquad \text{und} \qquad \bigcup_{j=1}^{n} T_j(M_j) = \overline{B}_2(0).$$

4. Abzählbare Mengen und Kardinalzahlen

Wir wiederholen zuerst einige Aussagen über Bild- und Urbildmengen:

4.1 Satz. *Sei* $f\colon X \to Y$ *eine Abbildung und sei* J *eine Indexmenge. Seien* $A, B \subset X$ *und* $C, D \subset Y$ *und für jedes* $j \in J$ *seien* $A_j \subset X$ *und* $B_j \subset Y$*. Dann*

(a) $f\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f(A_j)$.

(b) $f\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) \subset \bigcap_{j\in J} f(A_j)$.

(c) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$.

(d) $f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

(e) $f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

(f) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

4.2 Definition. Eine Menge M heißt *endlich*, wenn es ein $m \in \mathbb{N}_0$ und eine Bijektion von $\{1, \dots, m\}$ auf M gibt. Andernfalls heißt M *unendlich*.

Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn es eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf M gibt.

Eine Menge heißt *höchstens abzählbar*, wenn sie endlich oder abzählbar ist. Andernfalls heißt sie *überabzählbar*.

4.3 Satz. *Sei* A *abzählbar und* $M \subset A$*. Dann ist* M *höchstens abzählbar.*

4.4 Satz. *Für* $M \neq \emptyset$ *sind äquivalent:*

(a) M *ist höchstens abzählbar.*

(b) Es gibt eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ *auf* M*.*

4.5 Satz (Diagonalfolgenargument). *Sind* X, Y *abzählbar, so ist* $Y \times Y$ *abzählbar.*

4.6 Beispiel. (a) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{Q}^n$ abzählbar.

4.7 Satz. *Sind* $X_1, X_2, X_3, \dots$ *höchstens abzählbare Teilmengen einer Menge* Z*, so ist* $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ *höchstens abzählbar.*

4.8 Satz. $[0,1]$ *ist überabzählbar.*

4.9 Definition. Zwei Mengen X und Y haben die gleiche *Kardinalzahl*, wenn es eine Bijektion von X auf Y gibt. Wenn es eine Injektion von X nach Y gibt, dann ist die Kardinalzahl von X kleiner oder gleich der Kardinalzahl von Y.

4.10 Satz (Schröder-Bernstein). *Wenn die Kardinalzahl von X kleiner oder gleich der Kardinalzahl von Y ist und die Kardinalzahl von Y kleiner oder gleich derjenigen von X, dann besitzen X und Y die gleiche Kardinalzahl.*

Beweis. Findet man z. B. in Kapitel 22 von Halmos, “Naive Mengenlehre”. □

4.11 Satz. $\mathbb{R}^n$ *hat die gleiche Kardinalzahl wie* $\mathbb{R}$.

4.12 Satz. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *hat die gleiche Kardinalzahl wie* $\mathbb{R}$.

4.13 Bemerkung. Die *Kontinuumshypothese* besagt, dass jede überabzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ die gleiche Kardinalzahl besitzt wie $\mathbb{R}$. Die Kontinuumshypothese kann mit den Mitteln der Mengenlehre weder bewiesen noch widerlegt werden.

5. Messbare Abbildungen

5.1 Definition. Sein $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ Messräume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *messbar*, wenn für jedes $B \in \mathcal{B}$ gilt $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

5.2 Satz. *Seien X und Y metrische Räume. Dabei sei X versehen mit einer σ-Algebra $\mathcal{A}$, welche alle Borelmengen enthält, und Y sei versehen mit der σ-Algebra der Borelmengen. Wenn f stetig ist, dann ist f messbar.*

5.3 Bemerkung. Sind $f\colon (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ und $g\colon (Y, \mathcal{B}) \to (Z, \mathcal{C})$ messbar, so ist $g \circ f$ ebenfalls messbar.

5.4 Definition. Wir setzen $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Jede Abbildung $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ bezeichnet man als *numerische Funktion*.

5.5 Bezeichnung. (a) $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{A \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}) \mid A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ ist eine σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$.

(b) $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ist die kleinste σ-Algebra, die alle halboffenen Intervalle $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, sowie $\{\infty\}$ und $\{-\infty\}$ enthält.

(c) Eine numerische Funktion $f\colon (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt messbar, wenn $f\colon (X, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbar ist.

5.6 Beispiel. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Die *charakteristische Funktion* χ_A von A ist definiert durch

$$\chi_A\colon X \to \mathbb{R}, \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

χ_A ist genau dann eine messbare Funktion, wenn A eine messbare Menge ist.

5.7 Satz. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und f eine numerische Funktion auf X. Dann sind äquivalent:*

(a) f *ist messbar.*

(b) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\}$ messbar.

(c) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$ messbar.

(d) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$ messbar.

(e) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) < \alpha\}$ messbar.

5.8 Satz. *Seien* f *und* g *messbare numerische Funktionen auf* X. *Dann sind die folgenden Mengen messbar*

(a) $\{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$,

(b) $\{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$,

(c) $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$,

(d) $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$.

5.9 Satz. *Seien* $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ *messbar. Dann sind* $f + g$ *und* fg *messbar.*

5.10 Definition. Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren wir

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\sup\{a_k \mid k \geq n\}\big) \in \overline{\mathbb{R}},$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\inf\{a_k \mid k \geq n\}\big) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Da die Folge $(\sup\{a_k \mid k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt, existiert ihr Grenzwert. Für den $\liminf$ argumentiert man genauso.

5.11 Bemerkung. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn $\limsup_{n\to\infty} a_n = a = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

5.12 Satz. *Seien* $f_1, f_2, \ldots$ *messbare numerische Funktionen.*

(a) Die Funktionen $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *und* $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *sind messbar.*

(b) Die Funktionen $\limsup_{n\to\infty} f_n$ *und* $\liminf_{n\to\infty} f_n$ *sind messbar.*

(c) Wenn die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *punktweise in* $\overline{\mathbb{R}}$ *gegen* f *konvergiert, dann ist* f *messbar.*

5.13 Definition. Sei X ein metrischer Raum. Eine numerische Funktion f auf X heißt *Borel-messbar*, wenn $f\colon (X, \mathcal{B}(X)) \to (\overline{\mathrm{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathrm{R}}))$ messbar ist.

6. Integrationstheorie

In diesem Kapitel ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

6.1 Definition. Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ heißt *nicht-negative Treppenfunktion*, wenn gilt

(a) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in X$.

(b) f ist messbar.

(c) f nimmt nur endlich viele Werte an.

Mit $\mathcal{T}^+(X)$ bezeichnen wir die Menge der nicht-negativen Treppenfunktionen auf X.

6.2 Bemerkung. Jedes $f \in \mathcal{T}^+(X)$ lässt sich darstellen als $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $\alpha_i \geq 0$ und $A_i \in \mathcal{A}$. Die Summe $\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i)$ ist unabhängig von der Zerlegung.

6.3 Definition. Für $f \in \mathcal{T}^+(X)$, $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}$, definiert man das *Integral von* f durch

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i).$$

Bemerkung. Wenn $f, g \in \mathcal{T}^+(X)$ mit $f \leq g$, dann $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$. Das folgt aus der Unabhängigkeit der Summe $\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i)$ von der Zerlegung.

6.4 Satz. *Sei f eine messbare, nicht-negative, numerische Funktion auf X. Dann gibt es eine wachsende Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{T}^+(X)$ mit $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$.*

6.5 Lemma. *Seien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei monoton wachsende Folgen nicht-negativer Treppenfunktionen auf X mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$. Dann*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int g_n \, d\mu.$$

Insbesondere gilt $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int g_n \, d\mu$, wenn $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$.

6.6 Definition. Unter $\mathcal{M}^+(X)$ verstehen wir die Menge aller messbaren, nicht-negativen numerischen Funktionen auf X. Für $f \in \mathcal{M}^+(X)$ wählen wir eine monoton wachsende Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{T}^+(X)$ mit $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$ und setzen $\int f \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int g_n \, d\mu$.

6.7 Korollar. *Für $f, g \in \mathcal{M}^+(X)$ mit $f \leq g$ gilt $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.*

6.8 Bezeichnung. Für eine numerische Funktion f auf X seien $f^+ = \max\{f, 0\}$ und $f^- = -\min\{f, 0\}$. Dann $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$, und f ist genau dann messbar, wenn f^+ und f^- messbar sind.

6.9 Definition. Eine numerische Funktion f auf X heißt μ-integrierbar, wenn sie messbar ist und $\int f^+ d\mu$ und $\int f^- d\mu$ endlich sind. In diesem Fall schreiben wir

$$\int f\,d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

6.10 Satz. *Seien* f *und* g *integrierbare numerische Funktionen auf* X *und sei* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Dann sind auch* αf, $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ *und — falls überall definiert — auch* $f + g$ *integrierbar. Man hat*

$$\int \alpha f\,d\mu = \alpha \int f\,d\mu \quad \textit{und} \quad \int (f+g)d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu.$$

6.11 Beispiel. Wir versehen $\mathbb{N}$ mit der σ-Algebra $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und dem Maß $\mu(N) = \#N$. Dieses Maß ist das *Zählmaß* auf $\mathbb{N}$. Das Tripel $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ist ein Maßraum. Die numerischen Funktionen sind die Folgen, und diejenigen Folgen, die nur endlich viele Werte annehmen, sind die Treppenfunktionen. Eine numerische Funktion f auf $\mathbb{N}$ ist genau dann integrierbar, wenn die zugehörige Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ absolut konvergiert. In diesem Fall gilt $\int f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

6.12 Definition. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $N \in \mathcal{A}$ ist eine *Nullmenge*, wenn $\mu(N) = 0$.

Man sagt, eine Eigenschaft gelte *fast überall*, wenn die Menge aller Punkte, die die Eigenschaft nicht haben, in einer Nullmenge liegt.

6.13 Beispiel. (a) Jede Teilmenge einer Lebesgue-Nullmenge ist wieder messbar, also eine Lebesgue-Nullmenge.

(b) Sei $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n}{1+nx^2}$. Die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall gegen $\frac{1}{x^2}$.

6.14 Satz. *Für* $f \in \mathcal{M}^+(X)$ *gilt* $\int f\,d\mu = 0$ *genau dann, wenn* $f = 0$ *fast überall.*

6.15 Beispiel. Sei $N \in \mathcal{A}$ eine Nullmenge. Sei

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & x \in N, \\ 0, & x \notin N. \end{cases}$$

Dann $\int f\,d\mu = 0$.

Das bedeutet $0 \cdot \infty = 0$, wenn 0 ein Maß und ∞ ein Funktionswert ist. Offensichtlich gilt das ebenso, wenn 0 ein Funktionswert und ∞ ein Maß ist. Wenn dagegen — wie in der Analysis I — beide Zahlen Grenzwerte sind, dann hilft weiterhin nur eine feinere Analyse des Wachstumsverhaltens, etwa mittels der Regel von l'Hôpital.

6.16 Bezeichnung. (a) Das Lebesgue-Integral hat besondere Schreibweisen. Statt

$$\int f \, d\lambda^n$$

schreibt man auch

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\lambda^n(x) \quad \text{oder} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \quad \text{oder} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n.$$

(b) Das Lebesguemaß wird häufig auf Teilmengen eingeschränkt. Ist also $Y \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, so ist $\mathcal{L}^n(Y) = \{X \subset Y \mid X \in \mathcal{L}^n\}$ eine σ-Algebra auf Y. Die Einschränkung von λ^n auf $\mathcal{L}^n(Y)$ ist ein Maß auf Y. Statt $\int f \, d\lambda^n|_Y$ schreibt man $\int_Y f \, d\lambda^n$ oder $\int_Y f(x) d\lambda^n(x)$ oder ähnliches. Beachte

$$\int_Y f(x) d\lambda^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Y(x) f(x) d\lambda^n(x).$$

Im Unterschied zum Riemann-Integral schreibt man beim Lebesgue-Integral also immer eine Menge an das Integralzeichen.

7. Grenzwertsätze

7.1 Theorem (Satz über monotone Konvergenz, Satz von Beppo Levi). *Sei* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und sei* $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ *eine monoton wachsende Folge in* $\mathcal{M}^+(X)$*. Dann*

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

7.2 Beispiel. Sei $f_n = \chi_{[n,\infty)}$. Dann bilden die f_n eine monoton fallende Folge in $\mathcal{M}^+(\mathbb{R})$. Für jedes n gilt $\int f_n d\lambda^1 = \infty$, aber $\int \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda^1 = 0$.

7.3 Satz. *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$*, und sei* $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar. Dann ist* f *Lebesgue-integrierbar, und*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f \, d\lambda^1.$$

Bemerkung. In Elstrodt, Beispiel IV.6.2 c), wird eine Funktion angegeben, die zwar Riemann-integrierbar, aber nicht Borel-messbar ist.

7.4 Satz (Lemma von Fatou). *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathcal{M}^+(X)$*. Dann ist die Funktion* $\liminf_{n\to\infty}$ *in* $\mathcal{M}^+(X)$ *und*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Beispiel. Sei $f_n(x) = \max\{0, 1 - |x - n|\}$. Dann $\int f_n d\lambda^1 = 1$, aber $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = 0$ für alle x.

7.5 Theorem (Satz über majorisierte Konvergenz, Lebesguescher Grenzwertsatz). *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge integrierbarer numerischer Funktionen auf* X*, die fast überall punktweise gegen eine messbare, numerische Funktion* f *konvergiert. Es gebe eine integrierbare numerische Funktion* g *auf* X*, so dass* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *für alle* $x \in X$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Dann ist* f *integrierbar und*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

7.6 Bemerkung. Wenn $\mathcal{A} = \mathcal{L}^n$ (oder eine andere σ-Algebra mit der Eigenschaft, dass jede Teilmenge einer Nullmenge messbar ist), dann ist das f im Satz über majorisierte Konvergenz automatisch messbar.

7.7 Bemerkung. Eine uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion f ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Also ist beispielsweise die Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ über $\mathbb{R}$ nicht Lebesgue-integrierbar.

7.8 Bezeichnung. Seien I ein offenes Intervall und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $f\colon I \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wenn

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t,x) - f(t_0,x)}{t - t_0}$$

existiert, so schreiben wir $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)$ für den Grenzwert.

Ferner definieren wir für jedes $t \in I$ die Abbildung $f_t\colon X \to \mathbb{R}$, $f_t(x) = f(t,x)$.

7.9 Satz. $f\colon I \times X \to \mathbb{R}$ *habe die folgenden Eigenschaften*

(a) *Für alle* $t \in I$ *ist* f_t *integrierbar.*

(b) *Für alle* $(t,x) \in I \times X$ *existiert* $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$.

(c) *Es gibt eine integrierbare, numerische Funktion* g *mit* $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$ *für alle* $(t,x) \in I \times X$.

Definiert man nun $F\colon I \to \mathbb{R}$ *durch* $F(t) = \int f(t,x)\,d\mu(x)$, *so gelten*

(1) F *ist differenzierbar.*

(2) $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_t \colon X \to \mathbb{R}$ *ist integrierbar für jedes* $t \in I$.

(3) $F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\mu(x)$ *für jedes* $t \in I$.

8. Der Satz von Fubini

In diesem Kapitel sind $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n+m = N$. Die Elemente des $\mathbb{R}^N$ werden häufig als Paare (x, y) mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ geschrieben.

8.1 Bezeichnung. Für $E \subset \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ setzen wir

$$\begin{aligned} E_x &= \{\eta \in \mathbb{R}^m \mid (x, \eta) \in E\}, \\ E^y &= \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid (\xi, y) \in E\}. \end{aligned}$$

8.2 Satz. *Sei* $E \in \mathcal{L}^N$*. Dann gibt es eine Lebesgue-Nullmenge* $A \subset \mathbb{R}^n$*, so dass*

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ *ist* $E_x \in \mathcal{L}^m$*.*

(b) Die numerische Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} \lambda^m(E_x), & x \in \mathbb{R}^n \setminus A \\ 0, & x \in A, \end{cases}$$

ist auf $\mathbb{R}^n$ *Lebesgue-messbar.*

(c) $\lambda^N(E) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus A} \lambda^m(E_x)\, d\lambda^n(x)$*.*

Entsprechendes gilt, wenn man x *und* y *vertauscht.*

8.3 Korollar (Cavalierisches Prinzip). *Seien* $E, F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *mit* $\lambda^m(E_x) = \lambda^m(F_x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$*. Dann* $\lambda^N(E) = \lambda^N(F)$*.*

8.4 Korollar. $E \in \mathcal{L}^N$ *ist genau dann eine Nullmenge, wenn*

$$\lambda^m(E_x) = 0 \qquad \lambda^n(x)\text{-}f.ü.$$

8.5 Bezeichnung. Wenn A eine Lebesgue-Nullmenge und g eine Lebesgue-messbare numerische Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus A$ ist, dann gibt es eine Lebesgue-messbare numerische Funktion $\widetilde{g}$ auf dem $\mathbb{R}^n$, die in $\mathbb{R}^n \setminus A$ mit g übereinstimmt. Da $\int \widetilde{g}\, d\lambda^n$ nur von g abhängt, setzen wir

$$\int g\, d\lambda^n = \int \widetilde{g}\, d\lambda^n.$$

Mit dieser Setzung liest sich Aussage (c) des Satzes wie folgt

(c′) $\lambda^N(E) = \int \lambda^m(E_x) d\lambda^n(x)$.

8.6 Beispiel. Sei $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ der Einheitskreis. Nach Cavalieri erhalten wir

$$\lambda^2(E) = 2\int_{[-1,1]} \sqrt{1-y^2}d\lambda^1(y) = 4\int_0^1 \sqrt{1-y^2}dy = 4\int_0^{\pi/2} \cos(t)^2 dt = \pi.$$

8.7 Satz (Tonelli). *Sei* f *eine nicht-negative, Lebesgue-messbare, numerische Funktion auf dem* $\mathbb{R}^N$*. Dann existiert eine Lebesgue-Nullmenge* $A \subset \mathbb{R}^m$*, so dass für jedes* $y \in \mathbb{R}^m \setminus A$ *die Funktion* $x \mapsto f(x,y)$ *Lebesgue-messbar ist. Ferner ist die numerische Funktion* $g(y) = \int f(x,y)d\lambda^n(x)$ *auf* $\mathbb{R}^m \setminus A$ *Lebesgue-messbar, und es gilt*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)d\lambda^N(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m} g(y)d\lambda^m(y) &= \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)d\lambda^n(x)\right)d\lambda^m(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)d\lambda^m(y)\right)d\lambda^n(x).\end{aligned}$$

8.8 Theorem (Fubini). *Sei* f *eine Lebesgue-integrierbare numerische Funktion auf dem* $\mathbb{R}^N$*. Dann existiert eine Lebesgue-Nullmenge* $A \subset \mathbb{R}^m$*, so dass für jedes* $y \in \mathbb{R}^m \setminus A$ *die Funktion* $x \mapsto f(x,y)$ *Lebesgue-integrierbar ist. Ferner ist die numerische Funktion* $g(y) = \int f(x,y)d\lambda^n(x)$ *auf* $\mathbb{R}^m \setminus A$ *Lebesgue-integrierbar, und es gilt*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)d\lambda^N(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m} g(y)d\lambda^m(y) &= \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)d\lambda^n(x)\right)d\lambda^m(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)d\lambda^m(y)\right)d\lambda^n(x).\end{aligned}$$

Bemerkung. In der Praxis zeigt man die Intergrierbarkeit von f erst mit dem Satz von Tonelli und berechnet dann den Integralwert mit dem Satz von Fubini.

8.9 Beispiel. Betrachte für $R > 0$ die Funktion $f\colon [0,R] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{-xy}\sin(x)$. Diese Funktion ist stetig, also messbar. Es gilt $|f(x,y)| \leq xe^{-xy}$, also nach Tonelli

$$\int_{[0,R]\times[0,\infty)} |f(x,y)|d\lambda^2 \leq \int_{[0,R]\times[0,\infty)} xe^{-xy}d\lambda^2 = \int_0^R\int_0^\infty xe^{-xy}dy\,dx = \int_0^R 1\,dy = R.$$

Also kann der Satz von Fubini angewandt werden

$$\int_{[0,R]\times[0,\infty)} f(x,y)d\lambda^2 = \int_0^R\int_0^\infty \sin(x)e^{-xy}dy\,dx = \int_0^R \frac{\sin(x)}{x}dx \to \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx,$$

da uns die Existenz des uneigentlichen Integrals bereits aus der Analysis I bekannt ist.

Andererseits ist für festes y die Funktion $x \mapsto -\frac{e^{-xy}}{y^2+1}(y\sin(x)+\cos(x))$ eine Stammfunktion von $x \mapsto e^{-xy}\sin(x)$. Daher

$$\int_{[0,R]\times[0,\infty)} f(x,y)\,d\lambda^2 = \int_0^\infty \int_0^R \sin(x)e^{-xy}\,dx\,dy$$
$$= \int_{[0,\infty)} \left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{e^{-Ry}}{y^2+1}(y\sin(R)+\cos(R)\right) d\lambda^1(y).$$

Für genügend großes C ist $\frac{C}{y^2+1}$ eine Majorante des Integranden. Wir erhalten also aus dem Lebesgueschen Grenzwertsatz

$$\lim_{R\to\infty} \int_{[0,R]\times[0,\infty)} f(x,y)\,d\lambda^2 = \int_{[0,\infty)} \frac{1}{y^2+1}\,d\lambda^1(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Wir haben gezeigt

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

8.10 Korollar. *Seien* $a_{j,k} \in \mathbb{R}$ *mit* $\sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty |a_{j,k}| < \infty$. *Dann*

$$\sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty a_{j,k} = \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_{j,k}.$$

8.11 Beispiel. Sei

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{3n}, & \text{falls } 2^{-n} < x \le 2^{-n+1} \text{ und } 2^{-n} < y \le 2^{-n+1},\ n \in \mathbb{N}, \\ -2^{3n+1}, & \text{falls } 2^{-n-1} < x \le 2^{-n} \text{ und } 2^{-n} < y \le 2^{-n+1},\ n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Den Graphen der Funktion zeigt Abbildung 8.1; dabei werden Funktionswerte durch Farben ausgedrückt, rot ist groß, grün ist Null und blau ist klein.

Für y mit $2^{-n} < y \le 2^{-n+1}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = \int_{[2^{-n-1},2^{-n}]} (-2^{3n+1})\,dx + \int_{[2^{-n},2^{-n+1}]} 2^{3n}\,dx = -2^{-n-1}2^{3n+1} + 2^{-n}2^{3n} = 0.$$

Also $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,dy = 0$.

Für x mit $x \notin (0,1]$ gilt $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = 0$. Für die anderen existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $2^{-n} < x \le 2^{-n+1}$. Falls $n = 1$, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \int_{[\frac{1}{2},1]} 2^3\,dy = 4.$$

Falls $n > 1$, dann $m = n-1 \in \mathbb{N}$ und $2^{-m-1} < x \le 2^{-m}$, also

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \int_{[2^{-n},2^{-n+1}]} 2^{3n}\,dy - \int_{[2^{-m},2^{-m+1}]} 2^{3m+1}\,dy = 2^{-n}2^{3n} - 2^{-m}2^{3m+1}$$
$$= 2^{2n} - 2^{2m+1} = 2^{2n} - 2^{2n-1} = 2^{2n-1}.$$

Daher ist $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$ nicht Lebesgue-integrierbar. Nach Tonelli ist dann auch f nicht Lebesgue-integrierbar.

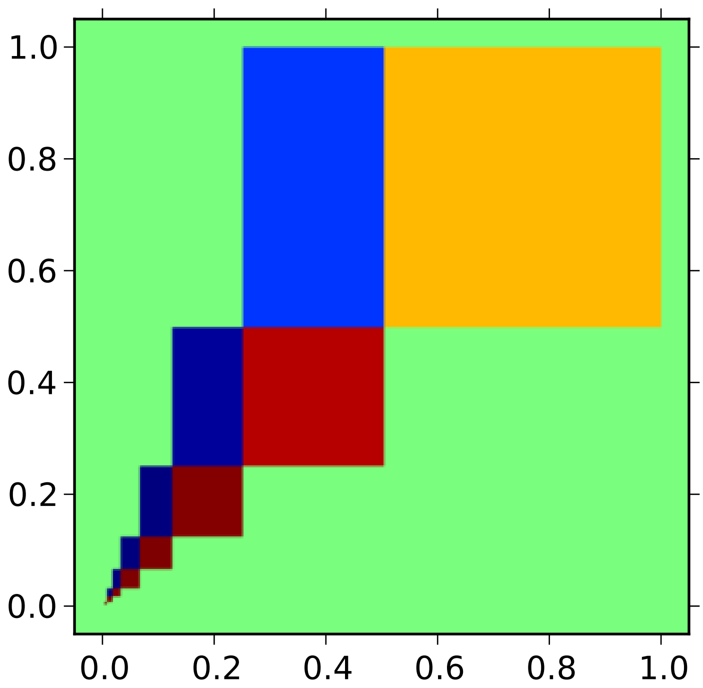

Abbildung 8.1.: Graph der Funktion aus Beispiel 8.11

9. Die Transformationsformel

Für eine Abbildung $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^m$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, hatten wir mit $Df(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die Jacobi-Matrix bezeichnet. Sie besteht aus den partiellen Ableitungen der Komponenten von Φ. Ein C^1-Diffeomorphismus $\Phi\colon U \to V$ ist eine bijektive C^1-Abbildung, deren Inverse ebenfalls von der Klasse C^1 ist; das ist nur möglich für $n = m$.

Auf dem $\mathbb{R}^{n\times n}$ verwenden wir in diesem Abschnitt die Matrixnorm, die zur Supremumsnorm gehört, also

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_\infty \le 1} \|Ax\|_\infty.$$

Mit E_n bezeichnen wir die $n \times n$-Einheitsmatrix.

9.1 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $T \in GL(\mathbb{R}, n)$.*

(a) Ist $A \subset U$ Lebesgue-messbar, so gilt

$$\lambda^n(T(A)) = \int_A |\det(T)| d\lambda^n(x).$$

(b) Ist $f\colon V \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist auch $f \circ T$ integrierbar.

(c) Ist $V\colon V \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt

$$\int_{T(U)} f(y) d\lambda^n(y) = \int_U f(Tx)|\det(T)| d\lambda^n(x).$$

9.2 Lemma. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\Phi\colon U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Für jede Borelmenge $M \subset U$ ist $\Phi(M)$ eine Borelmenge.*

Bezeichnung. Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ bezeichnen wir mit $W(a, r)$ den halboffenen Würfel $[a - r, a + r[= \prod_{j=1}^n [a_j - r, a_j + r)$.

9.3 Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $W(a, r) \subset U$ ein halboffener Würfel und sei $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus, für welchen ein $\epsilon \in (0, 1)$ existiert, so dass $\|D\Phi(x) - E_n\| \le \epsilon$ für alle $x \in W(a, r)$. Dann gilt für jedes $\delta \le r$*

$$\Phi(W(a, \delta)) \subset W(\Phi(a), (1 + \epsilon)\delta).$$

9.4 Lemma. *Seien* $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $\Phi\colon U \to V$ *ein* C^1*-Diffeomorphismus. Sei* Q *ein achsenparalleler Quader mit* $\overline{Q} \subset U$*. Dann*

$$\lambda^n(\Phi(Q)) \le \int_Q |\det(D\Phi(x))| d\lambda^n(x).$$

9.5 Definition. Sei X ein metrischer Raum, und sei $U \subset X$ offen. Ein *kompakte Ausschöpfung* von U besteht aus einer Folge $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset U$ kompakter Mengen, so dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = U$.

9.6 Lemma. *Jede offene Menge* $U \subset \mathbb{R}^n$ *besitzt eine kompakte Ausschöpfung.*

9.7 Lemma. *Für* Φ *wie in Lemma 9.4 sei* $M \subset U$ *Lebesgue-messbar. Dann ist* $\Phi(M)$ *Lebesgue-messbar mit*

$$\lambda^n(\Phi(M)) \le \int_M |\det(D\Phi(x))|\, d\lambda^n(x).$$

9.8 Satz (Transformationssatz). *Seien* $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $\Phi\colon U \to V$ *ein* C^1*-Diffeomorphismus.*

(a) Ist $A \subset U$ *Lebesgue-messbar, so gilt*

$$\lambda^n(\Phi(A)) = \int_A |\det(D\Phi(x))|\, d\lambda^n(x).$$

(b) Ist eine Funktion $f\colon V \to \mathbb{R}$ *integrierbar, so ist auch* $|\det(D\Phi)| \cdot (f \circ \Phi)$ *integrierbar.*

(c) Ist $f\colon V \to \mathbb{R}$ *integrierbar, so gilt*

$$\int_V f(y) d\lambda^n(y) = \int_U f(\Phi(x))\, |\det(D\Phi(x))|\, d\lambda^n(x).$$

9.9 Satz (Ebene Polarkoordinaten). *Ist* f *eine integrierbare, numerische Funktion auf dem* $\mathbb{R}^2$*, so ist* $(r, t) \mapsto rf(r\cos(t), r\sin(t))$ *über* $[0, \infty) \times [0, 2\pi]$ *integrierbar, und*

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{[0,2\pi]} \int_{[0,\infty)} f(r\cos(t), r\sin(t)) r\, dr\, dt.$$

9.10 Beispiel.

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx\right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy\right) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$$
$$= \int_{[0,2\pi]} \int_{[0,\infty)} e^{-r^2} r\, dr\, d\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr = 2\pi\, \frac{-1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} = \pi.$$

Wir haben gezeigt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

9.11 Bemerkung (Kugelkoordinaten). In Analysis II, Beispiel 18.5, hatte ich Kugelkoordinaten eingeführt: Für $(r, \varphi, \theta) \in [0, \infty) \times (-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist

$$\Psi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Wir hatten damals sogar schon ausgerechnet, dass $\det(D\Psi(r, \varphi, \theta)) = r^2 \cos\theta$. Also folgt aus dem Transformationssatz, dass eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ genau dann integrierbar ist, wenn die Funktion $g\colon [0, \infty) \times (-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $(r, \varphi, \theta) \mapsto f(\Psi(r, \varphi, \theta))r^2 \cos\theta$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_{[0,2\pi]} \int_{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \int_{[0,\infty)} f(\Psi(r, \varphi, \theta))r^2 \cos(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

9.12 Beispiel. Wir berechnen das Volumen des dreidimensionalen Einheitsballs K_3. Es gilt

$$\begin{aligned}\lambda^3(K_3) = \int_{[0,2\pi]} \int_{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \int_{[0,1]} r^2 \cos(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi &= \int_{[0,2\pi]} \int_{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \frac{1}{3} \cos(\theta)\,d\theta\,d\varphi \\ &= \frac{2}{3} \int_{[0,2\pi]} d\varphi = \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

10. L^p-Räume

Es sei wieder $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

10.1 Bezeichnung. Für $p \geq 1$ und eine messbare, numerische Funktion f auf X definieren wir

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

10.2 Lemma. *Für* $a, b > 0$ *und* $p, q \geq 1$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *gilt*

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

10.3 Satz (Höldersche Ungleichung). *Für messbare, reellwertige Funktionen* f, g *auf* X *und* $p, q \geq 1$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *gilt*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Bemerkung. Für $p = 2$ ergibt sich als Spezialfall die Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

für messbare Funktionen f und g.

10.4 Satz (Minkowskische Ungleichung). *Seien* f, g *messbare, reellwertige Funktionen auf* X. *Dann gilt für jedes* $p \geq 1$

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

10.5 Definition. Sei $1 \leq p < \infty$. Dann

$$\mathscr{L}^p(X) = \left\{ f \colon X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \;\middle|\; \int |f|^p < \infty \right\}.$$

Dann ist $\mathscr{L}^p(X)$ ein Vektorraum, und $\|f\|_p$ erfüllt (N1) und (N2). Falls das Maß nichtleere Nullmengen besitzt, so erfüllt $\|f\|_p$ aber nicht (N3), ist also nicht definit.

10.6 Definition. Sei $1 \leq p < \infty$. Setze

$$\mathscr{N} = \left\{ f \colon X \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int |f|^p = 0 \right\} = \left\{ f \colon X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \mu(\{x \mid f(x) \neq 0\}) = 0 \right\}.$$

Für $f \in \mathscr{L}^p(X)$ und $g \in \mathscr{N}$ folgt aus der Minkowskischen Ungleichung

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p = \|f\|_p \leq \|f+g\|_p + \|-g\|_p = \|f+g\|_p,$$

also $\|f+g\|_p = \|f\|_p$ für alle $g \in \mathscr{N}$. Wir können daher den Vektorraum

$$L^p(X) = \mathscr{L}^p(X)/\mathscr{N}$$

mit der Norm $\|f+\mathscr{N}\|_p = \|f\|_p$ versehen. Es ist üblich, die Elemente von $L^p(X)$ als Funktionen zu schreiben.

Zur Erinnerung: Ein *Banachraum* ist ein vollständiger normierter Raum, also einer, in dem jede Cauchyfolge konvergiert.

10.7 Lemma. *Sei E ein normierter Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E. Falls die Folge mindestens einen Häufungspunkt besitzt, so konvergiert sie.*

10.8 Satz. $L^p(X)$ *ist ein Banachraum.*

10.9 Definition. Ein *Skalarprodukt* auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum E ist eine Abbildung $\langle\cdot,\text{-}\rangle\colon E\times E \to \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(S1) $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x,y\rangle + \mu\langle y,z\rangle$ für alle $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $x,y\in E$,

(S2) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ für alle $x,y\in E$,

(S3) $\langle x,x\rangle \geq 0$ für alle $x\in E$ und $\langle x,x\rangle$ genau für $x=0$.

Ein Banachraum mit einer Norm von der Form $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, wobei $\langle\cdot,-\rangle$ ein Skalarprodukt ist, ist ein *Hilbertraum.*

10.10 Bemerkung. (a) Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum. Dann wird der $L^2(X)$ durch das folgende Skalarprodukt zu einem Hilbertraum

$$\langle f,g\rangle = \int fg\,d\mu.$$

(b) Das geht auch komplexwertig: Dazu betrachtet man das Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle = \int f\overline{g}\,d\mu$$

auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$L^2(X,\mathbb{C}) = \{f\colon X\to\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)\in L^2(X)\}.$$

(c) Zwei Elemente x und y eines Hilbertraums stehen *senkrecht* aufeinander, wenn $\langle x,y\rangle = 0$.

(d) Für $n\in\mathbb{Z}$ definiere $e_n\in L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$ durch $e_n(x) = e^{inx}$. Für $n,m\in\mathbb{Z}$ mit $n\neq m$ stehen e_n und e_m senkrecht aufeinander.

(e) Umgekehrt gilt: Die einzige Funktion $f\in L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$, die auf allen e_n, $n\in\mathbb{Z}$, senkrecht steht, ist die Nullfunktion. Diese Aussage ist der Grundstein der Theorie der Fourierreihen. Wir zeigen sie jetzt nicht.

11. Die Faltung

11.1 Lemma. *Für* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *ist die Funktion* $(x, y) \mapsto f(x)g(y-x)$ *in* $L^1(\mathbb{R}^{2n})$ *und für fast alle* $y \in \mathbb{R}^n$ *ist die Funktion* $x \mapsto f(x)g(y-x)$ *in* $L^1(\mathbb{R}^n)$.

11.2 Definition. Die Verknüpfung

$$*\colon L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n), \quad (f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)d\lambda^n(x),$$

bezeichnet man als *Faltungsprodukt.*

11.3 Satz. *Für* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *gilt* $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. *Insbesondere* $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

11.4 Beispiel. Für $A > 0$ sei $f = \frac{1}{A}\chi_{[0,A]}$. Für $g \in L^1(\mathbb{R})$ ist die Faltung

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y-x)d\lambda^1(x) = \frac{1}{A}\int_{[0,A]} g(y-x)d\lambda^1(x)$$

gleich dem *gleitenden Durchschnitt* von g.

11.5 Lemma. *Das Faltungsprodukt ist kommutativ.*

11.6 Definition. (a) Sei X ein metrischer Raum und sei $f \in C(X)$. Die Menge

$$\operatorname{Supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

ist der *Träger* von f.

(b) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $k \in \mathbb{N}_0$ oder $k = \infty$. Der $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$C_c^k(G) = \{f \in C^k(G) \mid \operatorname{Supp}(f) \text{ kompakt}\}$$

ist der Raum der Funktionen der Klasse C^k mit kompaktem Träger.

11.7 Beispiel. Wir hatten in Bemerkung 13.8 der Analysis I gesehen, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

von der Klasse C^∞ ist. Setze $A = \int_{\mathbb{R}} f(x)f(1-x)d\lambda^1(x)$. Dann liegt die Funktion $g(x) = \frac{1}{A}f(x)f(1-x)$ in $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Ihr Träger ist $\operatorname{Supp}(g) = [0, 1]$. Außerdem ist g nicht-negative und $\int g \, d\lambda^1 = 1$.

11.8 Satz. *Sei* $k \in \mathbb{N}_0$ *oder* $k = \infty$, *sei* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *und sei* $g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$. *Dann* $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ *und es gilt für* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *mit* $|\alpha| \leq k$

$$\frac{\partial^{|\alpha|}(f * g)}{\partial y^\alpha} = f * \left(\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial y^\alpha}\right).$$

Teil II.

Vektoranalysis

12. Zusammenhang und Wegzusammenhang

12.1 Definition. Ein metrischer Raum X heißt *wegzusammenhängend,* wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$ gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

12.2 Beispiel. Die wegzusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle.

12.3 Satz. *Seien X, Y zwei metrische Räume und sei $f\colon X \to Y$ stetig. Ist X wegzusammenhängend, so auch $f(X)$.*

12.4 Korollar. *Sei X wegzusammenhängend und sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(X)$ ein Intervall.*

12.5 Beispiel. Die Menge $M = \overline{\{(t, \sin(\frac{1}{t})) \mid 0 < t < 1\}}$ ist nicht wegzusammenhängend.

12.6 Definition. Ein metrischer Raum X heißt *zusammenhängend,* wenn es in ihm höchstens zwei Mengen gibt, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind (nämlich $\emptyset$ und X).

12.7 Bemerkung. Für einen metrischen Raum X sind äquivalent:

(a) X ist zusammenhängend.

(b) X lässt sich nicht als disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer offener Mengen schreiben.

(c) X lässt sich nicht als disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer abgeschlossener Mengen schreiben.

12.8 Lemma. *Sei X ein metrischer Raum, sei G eine offene und abgeschlossene Teilmenge von X und sei $y \in X$. Falls es einen stetigen Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ gibt mit $\gamma(1) = y$ und $\gamma(0) \in G$, so ist y in G.*

12.9 Satz. *Jede wegzusammenhängende Menge ist zusammenhängend.*

12.10 Beispiel. M aus Beispiel 12.5 ist zusammenhängend.

12.11 Satz. *Für eine offene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:*

(a) M *ist zusammenhängend.*

(b) M *ist wegzusammenhängend.*

(c) *Zu je zwei Punkten* $x, y \in M$ *existiert ein Weg* $\gamma \colon [0,1] \to M$ *von der Klasse* C^∞ *mit* $\gamma(0) = x$ *und* $\gamma(1) = y$.

12.12 Bemerkung. Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle.

12.13 Satz. *Seien* X, Y *zwei metrische Räume und sei* $f \colon X \to Y$ *stetig. Ist* X *zusammenhängend, so auch* $f(X)$.

13. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$

Ich wiederhole ein paar Grundbegriffe aus der Analysis II. Im Unterschied zu damals konzentrieren wir uns nun auf Untermannigfaltigkeiten von der Klasse C^∞.

13.1 Definition. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^N$ heißt n-dimensionale *Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^N$, wenn es für jedes $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^N$ von a und eine Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^{N-n}$ von der Klasse C^∞ gibt, so dass

(a) $M \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$,

(b) $\operatorname{Rang}(Df(a)) = N - n$.

Ein Diffeomorphismus ist ein C^∞-Diffeomorphismus.

13.2 Satz. *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$. Dann sind äquivalent:*

(a) M ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.

(b) Für jedes $a \in M$ existieren eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^N$ von a, eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^N$ und ein Diffeomorphismus $h\colon U \to V$ mit

$$h(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}).$$

13.3 Definition. Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\varphi\colon W \to \mathbb{R}^N$ von der Klasse C^∞. Falls $\operatorname{Rang} D\varphi(x) = n$ für alle $x \in W$, so ist φ eine *Immersion.*

13.4 Definition. Seien X, Y zwei metrische Räume. Eine bijektive Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Homöomorphismus*, wenn sowohl f als auch f^{-1} stetig sind. Wenn es einen Homöomorphismus zwischen X und Y gibt, so sind die beiden Räume *homöomorph.*

13.5 Beispiel. (a) Die Abbildung $f\colon [0, 2\pi) \to S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, ist stetig und bijektiv. Sie ist aber kein Homöomorphismus. Es ist nämlich $S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$ zusammenhängend, ihr Bild unter f^{-1} ist aber gleich $[0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, was nicht zusammenhängend ist.

(b) Seien X, Y kompakte metrische Räume und sei $f\colon X \to Y$ stetig und bijektiv. Dann ist f ein Homöomorphismus.

13.6 Satz. *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$. Dann sind äquivalent:*

(a) *M ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.*

(b) *Für jedes $a \in M$ existieren eine offene Umgebung $V \subset M$ von a in M, eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^n$ und eine Immersion $\varphi\colon W \to \mathbb{R}^N$, die W homöomorph auf V abbildet.*

13.7 Definition. Jedes solche φ ist eine *Karte* von M.

All das hatten wir bereits in der Analysis II bewiesen.

13.8 Satz. *Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und seien $\varphi_j\colon W_j \to V_j$ zwei Karten von M. Sei $V = V_1 \cap V_2$, und seien $U_j = \varphi_j^{-1}(V)$, $j = 1, 2$. Dann sind die U_j offene Teilmengen des $\mathbb{R}^k$, und die Abbildung*

$$\tau(\varphi_1, \varphi_2) = \left(\varphi_2|_{U_2}\right)^{-1} \circ \left(\varphi_1|_{U_1}\right)\colon U_1 \to U_2$$

ist ein Diffeomorphismus. Er wird als Parametertransformation *bezeichnet.*

13.9 Definition. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Falls $\det(D\varphi(x)) > 0$ für alle $x \in U$, so ist φ *orientierungstreu*.

Beispiel. Im $\mathbb{R}^2$ ist die Spiegelung an der y-Achse nicht orientierungstreu.

13.10 Definition. Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.

(a) Eine Menge $\{\varphi_j\colon W_j \to V_j \mid j \in J\}$ von Karten von M heißt *Atlas* von M, wenn $M = \bigcup_{j \in J} V_j$.

(b) Zwei Karten φ_1, φ_2 heißen *gleich orientiert*, wenn $\tau(\varphi_1, \varphi_2)$ orientierungstreu ist. (Nach unserer Definition ist die leere Abbildung orientierungstreu.)

(c) Ein Atlas heißt *orientiert*, wenn je zwei seiner Karten gleich orientiert sind.

(d) M heißt *orientierbar*, wenn M einen orientierten Atlas besitzt.

13.11 Beispiel. $\mathbb{R}$ als eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}$ hat zwei Orientierungen, gegeben durch die beiden Atlanten $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(\psi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, wobei

$$\begin{aligned} \varphi_n&\colon (-1, 2) \to \mathbb{R}, & t &\mapsto n + t, \\ \psi_n&\colon (-1, 2) \to \mathbb{R}, & t &\mapsto n - t. \end{aligned}$$

Das Riemann-Integral sieht den Unterschied auch, es ist nämlich

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

13.12 Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und sei $a \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^N$ heißt *Tangentialvektor* an M in a, falls es ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine C^∞-Abbildung $\psi\colon I \to \mathbb{R}^N$ gibt mit

(a) $\psi(I) \subset M$,

(b) $\psi(0) = a$,

(c) $\psi'(0) = v$.

Die Menge $T_a(M)$ aller Tangentialvektoren an M in a bezeichnet man als den *Tangentialraum* an M in a.

13.13 Satz. *Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$, sei $a \in M$. Laut Definition der Untermannigfaltigkeit gibt es eine Umgebung U von a und eine Abbildung $g\colon U \to \mathbb{R}^{N-n}$ von der Klasse C^∞ mit $M \cap U = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$ und $\operatorname{Rang}(Dg(a)) = N - n$.*

Nach Satz 13.6 gibt es eine Karte $\varphi\colon W \to M$ und $b \in W$ mit $\varphi(b) = a$. Mit diesen Abbildungen gilt

$$\{D\varphi(b)y \mid y \in \mathbb{R}^n\} = T_a(M) = \{v \in \mathbb{R}^N \mid Dg(a)v = 0\}.$$

13.14 Definition. Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und sei $a \in M$. Das Orthogonalkomplement von $T_a(M)$ im $\mathbb{R}^N$ wird mit $N_a(M)$ bezeichnet und heißt *Normalenraum* von M in a. Die Elemente von $N_a(M)$ heißen *Normalenvektoren*.

13.15 Beispiel. Ist $a \in S^{n-1}$, so ist $T_a(S^{n-1}) = a^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle a|v\rangle = 0\}$ und $N_a(S^{n-1})$ ist der von a erzeugte Unterraum.

13.16 Satz. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{k+1}$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sie ist genau dann orientierbar, wenn es eine stetige Abbildung $n\colon M \to \mathbb{R}^{k+1}$ gibt, so dass $n(a) \in N_a(M) \setminus \{0\}$ für jedes $a \in M$ gilt.*

13.17 Beispiel. Das Möbiusband

$$M = \left\{ \left(3\cos(t) + s\sin\left(\frac{t}{2}\right),\ 3\sin(t),\ s\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right) \middle| \, 0 \le t \le 2\pi,\ -1 < s < 1 \right\}$$

ist nicht orientierbar.

Skizze. Man zeigt zuerst, dass

$$\varphi\colon (0, 2\pi) \times (-1, 1) \to M, (t, s) \mapsto \left(3\cos(t) + s\sin\left(\frac{t}{2}\right),\ 3\sin(t),\ s\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right)$$

eine Karte von M ist. Auf dieser Karte erhalten wir einen Normalenvektor durch das Kreuzprodukt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} \times \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} -3\sin(t) + \frac{s}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ 3\cos(t) \\ -\frac{s}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ 0 \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3\cos(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ -\frac{s}{2}\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + 3\sin(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{s}{2}\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ -3\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(t) \end{pmatrix}$$

Der Punkte $(3,0,0) \in M$ kann approximiert werden als $\lim_{t\to 0} \varphi(t,0)$ und als $\lim_{t\to 2\pi} \varphi(t,0)$. Im ersten Fall konvergiert der Normalvektor gegen $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, im zweiten gegen $\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Also gibt es keine stetige Normale. □

13.18 Definition. Mit $\mathbb{R}^k_- = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 \leq 0\}$ bezeichnen wir den linken Halbraum. Sein Rand ist $\partial\mathbb{R}^k_- = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 = 0\}$.

13.19 Bezeichnung. Die Untermannigfaltigkeit M ist durch Einschränkung der Metrik auf dem $\mathbb{R}^N$ selber ein metrischer Raum. Eine Menge $X \subset M$ ist genau dann offen in M, wenn es eine offene Menge G im $\mathbb{R}^N$ gibt, so dass $X = M \cap G$. Die analoge Aussage gilt für abgeschlossene Mengen. Mit ∂X soll nun der Rand von X als Teilmenge von M gemeint sein. Er besteht aus allen Punkten $x \in M$, so dass jede seiner Umgebungen sowohl einen Punkt in X, als auch einen Punkt in $M \setminus X$ enthält.

13.20 Definition. Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$. Dann ist X eine k-dimensionale *abgeschlossene, berandete Untermannigfaltigkeit* von M, wenn es zu jedem $a \in \partial X$ eine Karte $\varphi\colon W \to V$ von M gibt, so dass gilt

(a) $a \in V$,

(b) $\varphi(\mathbb{R}^k_- \cap W) = X \cap V$,

(c) $\varphi(\partial\mathbb{R}^k_- \cap W) = \partial X \cap V$.

Eine solche Karte heißt *randadaptiert* bzgl. X.

13.21 Bemerkung. Sei $k \geq 2$. Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und sei X eine k-dimensionale, abgeschlossene, berandete Untermannigfaltigkeit von M.

(a) $\partial X \subset X$, weil $\{0\} \times \mathbb{R}^{k-1} \subset \mathbb{R}^k_-$. Insbesondere ist X abgeschlossen in M.

(b) Es gibt einen Atlas $\mathcal{A}$ von M, so dass jede Karte $\varphi\colon W \to V$ aus $\mathcal{A}$ mit $V \cap \partial X \neq \emptyset$ randadaptiert bzgl. X ist. Ein solcher Atlas heißt *randadaptiert* bzgl. X. Wenn M orientiert ist, so kann auch $\mathcal{A}$ orientiert gewählt werden.

(c) ∂X ist eine $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.

(d) Ist $\mathcal{A}$ ein orientierter, bzgl. X randadaptierter Atlas von M, so ist der zugehörige Atlas $\mathcal{A}_0$ von ∂X orientierbar. Das folgt im Fall $M = \mathbb{R}^k$ aus Satz 13.16, indem man in jedem Punkt die äußere Normale wählt.

14. Differentialformen

14.1 Bezeichnung. Ist $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, so bezeichnet $\mathfrak{V}(U)$ die Menge aller C^∞-Abbildungen $F\colon U \to \mathbb{R}^3$. Die Komponentenabbildungen bezeichnen wir mit F_j, $j = 1, 2, 3$, also $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$. Die Elemente von $\mathfrak{V}(U)$ heißen *glatte Vektorfelder* auf U. Man hat lineare Abbildungen

$$C^\infty(U) \xrightarrow{\text{grad}} \mathfrak{V}(U) \xrightarrow{\text{rot}} \mathfrak{V}(U) \xrightarrow{\text{div}} C^\infty(U)$$

wobei

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(f) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right), \\
\operatorname{rot}(F) &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right), \\
\operatorname{div}(F) &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}.
\end{aligned}$$

Es gilt $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$ und $\operatorname{div}\operatorname{rot} F = 0$.

Ist U konvex, so kann man zeigen: Zu jedem F mit $\operatorname{rot} F = 0$ gibt es ein f mit $\operatorname{grad} f = F$ und zu jedem F mit $\operatorname{div} F = 0$ gibt es ein G mit $\operatorname{rot} G = F$.

Diesen Kalkül wollen wir für höhere Dimensionen verallgemeinern.

14.2 Bezeichnung. $e_1, \dots, e_n$ bezeichne die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Es sei $(\mathbb{R}^n)^*$ der Dualraum von $\mathbb{R}^n$, also der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann bilden $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ eine Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$, wobei

$$\Delta_i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

14.3 Definition. Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine *alternierende* k-*Form* auf dem $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $\omega\colon (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ mit

(a) ω ist linear in jedem Argument.

(b) für $i \neq j$ gilt $\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots)$, wenn alle anderen Argumente unverändert bleiben.

Die alternierenden k-Formen auf $\mathbb{R}^n$ bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$. Man setzt $\Lambda^0(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}$.

14.4 Beispiel. (a) $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)^* = (\mathbb{R}^n)^*$.

(b) Durch $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \det(v_1, \dots, v_n)$ erhält man eine alternierende n-Form auf dem $\mathbb{R}^n$.

(c) Ein Beispiel einer konkreten 2-Form auf dem $\mathbb{R}^3$ liefert

$$\omega\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

14.5 Bemerkung. Die Bedingung (b) in Definition 14.3 ist äquivalent zu

(b*) $\omega(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$.

14.6 Definition. Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in (\mathbb{R}^n)^*$, so definiert man $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ durch

$$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det\left((\varphi_i(v_j))_{i,j=1,\dots,k}\right).$$

14.7 Beispiel. Die 2-Form aus dem letzten Beispiel ist gleich $\Delta_1 \wedge \Delta_2$.

14.8 Bezeichnung. Ist $I \subset \{1, \dots, n\}$, also $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, so setzt man

$$\begin{aligned} |I| &= k, \\ e_I &= (e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \in (\mathbb{R}^n)^k, \\ \Delta_I &= \Delta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \Delta_{i_k} \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*. \end{aligned}$$

14.9 Bemerkung. (a) Sind $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ mit $|I| = |J|$, so gilt

$$\Delta_I(e_J) = \begin{cases} 1, & I = J, \\ 0, & I \neq J. \end{cases}$$

(b) $\Delta_\emptyset = \mathrm{id}_\mathbb{R} \in \Lambda^0(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^*$.

14.10 Satz. *Die Δ_I mit $|I| = k$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$. Insbesondere $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* = \binom{n}{k}$ und $\lambda^k(\mathbb{R}^n)^* = \{0\}$ für $k > n$.*

Beweis. Wird in der Linearen Algebra II gezeigt, bei Herrn Köhler als Satz 3.12. □

14.11 Definition. Für $I, J \subset \{1, \dots, n\}$, $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ und $J = \{j_1, \dots, j_h\}$ mit $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_h \leq n$ setzen wir

$$\Delta_I \wedge \Delta_J = \Delta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \Delta_{i_k} \wedge \Delta_{j_1} \wedge \cdots \wedge \Delta_{j_h}.$$

Daraus konstruiert man eine Verknüpfung

$$\begin{gathered} \wedge\colon \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \times \Lambda^h(\mathbb{R}^n)^* \to \Lambda^{k+h}(\mathbb{R}^n)^*, \\ \left(\sum_{|I|=k} a_I \Delta_I\right) \wedge \left(\sum_{|J|=h} b_J \Delta_J\right) = \sum_{I,J} a_I b_J \Delta_I \wedge \Delta_J. \end{gathered}$$

14.12 Beispiel. (a) $\Delta_{\{1,3\}} \wedge \Delta_{\{2\}} = -\Delta_{\{1,2,3\}}$.

(b) $\Delta_I \wedge \Delta_I = 0$ für alle $I \neq \emptyset$.

14.13 Satz. *Die Verknüpfung $\wedge$ ist bilinear, assoziativ und graduiert kommutativ. Letzteres bedeutet*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kh} \eta \wedge \omega \quad \textit{für } \omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \textit{ und } \eta \in \Lambda^h(\mathbb{R}^n)^*.$$

Beweis. Wird in der Linearen Algebra II bewiesen, bei Herrn Köhler in Satz 3.9 und Lemma 3.11. □

14.14 Definition. (a) Sei U offen im $\mathbb{R}^n$. Eine *Differentialform der Ordnung* k oder k-*Form* ist eine Abbildung

$$\omega \colon U \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*.$$

Insbesondere sind die 0-Formen gerade die Funktionen $U \to \mathbb{R}$.

(b) Die konstante Differentialform $x \mapsto \Delta_I$ wird mit dx_I bezeichnet. Statt $dx_{\{i\}}$ schreibt man dx_i.

14.15 Definition. Eine Differentialform ω der Ordnung k auf U ist von der Form

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen f_I. Man sagt, ω sei stetig bzw. von der Klasse C^p, wenn alle f_I diese Eigenschaft haben. Eine *glatte* Differentialform ist eine Differentialform von der Klasse C^∞. Mit $\Omega^k(U)$ bezeichnen wir den $\mathbb{R}$-Vektorraum der glatten k-Formen auf U.

14.16 Bemerkung. (a) Die Summe von zwei k-Formen ist dabei wie folgt erklärt: Ist $\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$ und $\eta = \sum_{|I|=k} b_I dx_I$, so ist $\omega + \eta = \sum_{|I|=k} (f_I + g_I) dx_I$.

(b) Für eine k-Form ω und eine h-Form η ist das äußere Produkt erklärt durch $(\omega \wedge \eta)(x) = \omega(x) \wedge \eta(x)$.

(c) Es gilt $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, speziell $dx_i \wedge dx_i = 0$.

14.17 Definition. Sei $\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$ eine glatte k-Form auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Die $(k+1)$-Form

$$d\omega = \sum_{|I|=k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$$

bezeichnet man als *äußere Ableitung* von ω.

14.18 Beispiel. (a) $U = \mathbb{R}^3$ und ω sei die 3-Form $x \mapsto (3x_1 + 4x_2^2)dx_1 \wedge dx_3$. Dann $d\omega(x) = -8x_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

(b) Sei ω die 0-Form $x \mapsto x_i$. Dann $d\omega = dx_i$.

(c) Sei ω eine glatte 0-Form, also $\omega(x) = f(x)$. Dann $d\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$, was man mit dem Gradienten identifizieren kann.

14.19 Bemerkung. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen. Man hat das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(U) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, "="] & \mathfrak{V}(U) \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, "\varphi_1"', "\cong"] & \mathfrak{V}(U) \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\varphi_2"', "\cong"] & C^\infty(U) \arrow[d, "\varphi_3"', "\cong"] \\
\Omega^0(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^2(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^3(U)
\end{tikzcd}$$

Dabei sind die Vektorraumisomorphismen φ_1, φ_2, φ_3 gegeben durch

$$\begin{aligned}
\varphi_1(f_1, f_2, f_3) &= f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz, \\
\varphi_2(f_1, f_2, f_3) &= f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy, \\
\varphi_3(f) &= f dx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

14.20 Bemerkung. (a) Die Abbildung $d\colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ ist linear.

(b) Für $\omega \in \Omega^k(U)$ und $\eta \in \Omega^h(U)$ gilt

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

Der folgende Satz ist eine Folgerung des Satzes von H. A. Schwarz (Analysis II, Satz 7.2)

14.21 Satz. *Ist ω eine Differentialform von der Klasse C^2, so gilt $d(d\omega) = 0$.*

14.22 Definition. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn es ein $x_0 \in U$ gibt, so dass für jedes $x \in U$ die Verbindungsstrecke zwischen x und x_0 in U liegt.

Bemerkung. Konvexe Mengen sind sternförmig.

14.23 Bezeichnung. Für $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ mit $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ sei

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = dx_{I \setminus \{i_\ell\}}.$$

14.24 Satz (Lemma von Poincaré). *Sei U eine offene, sternförmige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, sei $k \in \mathbb{N}$ und sei $\omega \in \Omega^k(U)$ mit $d\omega = 0$. Dann existiert $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ mit $d\eta = \omega$.*

Beweis. Wie beweisen tatsächlich eine stärkere Behauptung: Für jedes k gibt es eine lineare Abbildung $\Phi_k\colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k-1}(U)$, so dass $\omega = \Phi_{k+1}(d\omega) + d\Phi_k(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega^k(U)$.

Wir dürfen annehmen, dass $x_0 = 0$ in Definition 14.22. Dann definieren wir

$$\Phi_k(\omega)(x) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} f_{i_1,\ldots,i_k}(tx)\,dt \right) x_{i_\ell}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Um die benötigten partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_I}{\partial x_j}$ auszurechnen verwenden wir Satz 7.9 über die Ableitung unter dem Integral

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(x_{i_\ell} \int_0^1 t^{k-1} f_{i_1,\ldots,i_k}(tx)\,dt \right) = \begin{cases} \int_0^1 t^{k-1} f_{i_1,\ldots,i_k}(tx)\,dt + x_{i_\ell} \int_0^1 t^k \frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_j}(tx)\,dt, & j = i_\ell \\ x_{i_\ell} \int_0^1 t^k \frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_j}(tx)\,dt, & j \neq i_\ell. \end{cases}$$

Also

$$(d\Phi_k(\omega))(x) = k \sum_{i_1<\cdots<i_k} \left(\int_0^1 t^{k-1} f_{i_1,\ldots,i_k}(tx)\,dt \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$
$$+ \sum_{i_1<\cdots<i_k} \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\ell-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_j}(tx)\,dt \right) x_{i_\ell}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Andererseits

$$d\omega(x) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_j}(x)\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

also

$$(\Phi_{k+1}(d\omega))(x) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_j}(tx)\,dt \right) x_j\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$
$$+ \sum_{i_1<\cdots<i_k} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_j}(tx)\,dt \right) x_{i_\ell}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Die Dreifachsummen heben sich gegenseitig weg und wir bekommen

$$d\Phi_k(\omega) + \Phi_{k+1}(d\omega) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} g_{i_1,\ldots,i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

wobei

$$
\begin{aligned}
g_{i_1,\dots,i_k}(x) = k\int_0^1 t^{k-1} f_{i_1,\dots,i_k}(tx)\,dt + \sum_{j=1}^{n}\int_0^1 x_j t^k \frac{\partial f_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x_j}(tx)\,dt \\
= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(t^k f_{i_1,\dots,i_k}(tx)\right) dt = f_{i_1,\dots,i_k}(x). \quad \square
\end{aligned}
$$

14.25 Definition. Sei U offen im $\mathbb{R}^n$, sei V offen im $\mathbb{R}^m$, sei $\varphi\colon V \to U$ glatt. Wir bezeichnen mit φ_i die i-te Komponentenfunktion von φ, also $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $\omega \in \Omega^k(U)$, $\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} f_{i_1,\dots,i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, eine k-Form. Dann ist

$$
\varphi^*(\omega) = \sum_{i_1<\dots<i_k} (f_{i_1,\dots,i_k} \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k} \in \Omega^k(V)
$$

die mit φ *zurückgezogene* Differentialform.

14.26 Beispiel. $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}$, $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$, und $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ sei gegeben durch $\omega = xy^2dx + y\,dy$. Dann $d\varphi_1 = -\sin(t)dt$ und $d\varphi_2 = \cos(t)dt$. Daher

$$
\begin{aligned}
\varphi^*(\omega) &= \cos(t)\sin^2(t)(-\sin(t))dt + \sin(t)\cos(t)dt \\
&= \sin(t)\cos(t)(1-\sin(t)^2)dt = \sin(t)\cos(t)^3dt.
\end{aligned}
$$

14.27 Satz. *Es gelten*

(a) φ^* *ist linear.*

(b) Ist $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$, *dann* $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$.

(c) $\varphi^*(f\omega) = (f \circ \varphi)\varphi^*(\omega)$.

(d) $\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\eta)$.

(e) $d(\varphi^*(\omega)) = \varphi^*(d\omega)$.

(f) $\psi^*(\varphi^*(\omega)) = (\varphi \circ \psi)^*(\omega)$.

14.28 Bemerkung. (a) Die Abbildung $\varphi \mapsto \varphi^*$ ist durch die Eigenschaften (a)–(e) eindeutig bestimmt. Bezeichnet man mit $p_i\colon x \mapsto x_i$ die Projektion auf die i-te Koordinate, so stellt sich das entscheidende Argument wie folgt dar

$$
\varphi^*(dx_i) = d(\varphi^*(p_i)) = d(p_i \circ \varphi) = d\varphi_i.
$$

(b) Falls $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi\colon U \to V$ glatt, so gilt

$$
\varphi^*(f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = (f \circ \varphi)\det(D\varphi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.
$$

15. Wegintegrale

15.1 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig, sei $c < a < b < d$, sei $\varphi\colon (c,d) \to U$ von der Klasse C^1, und sei $\gamma = \varphi|_{[a,b]}$. Wir definieren

$$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt.$$

15.2 Beispiel. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, sei $c < d$. Für festes $(x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ sei der Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\gamma(t) = (a + t(b-a), x_2, \ldots, x_n)$. Dann

$$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = \int_a^b f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1.$$

15.3 Satz. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$*, sei* $f\colon U \to \mathbb{R}$ *von der Klasse* C^1*, und sei* $g = \mathrm{grad}(f)$*. Seien ferner* $c < a < b < d$*,* $\varphi\colon (c,d) \to U$ *von der Klasse* C^1 *und* $\gamma = \varphi|_{[a,b]}$*. Dann*

$$\int_\gamma g(\zeta)d\zeta = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

16. Zerlegungen der Eins

16.1 Definition. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und seien $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $X \subset A_1 \cup \dots \cup A_m$. Man sagt, dass die Funktionen $g_1, \dots, g_m \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine *glatte Zerlegung der Eins auf* X bilden, welcher der Überdeckung $A_1, \dots, A_m$ untergeordnet ist, wenn gilt:

(a) Alle g_j sind von der Klasse C^∞.

(b) $g_j(x) \geq 0$ für alle x und alle j.

(c) $\sum_{j=1}^{m} g_j(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(d) $\sum_{j=1}^{m} g_j(x) = 1$ für alle $x \in X$.

(e) Für alle j ist $\operatorname{Supp}(g_j)$ kompakt und in A_j enthalten.

16.2 Bemerkung. (a) Wir hatten in der Analysis I gesehen, dass durch die folgende Vorschrift eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ gegeben wird

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(b) Dann ist $g(x) = f(1 - x^2)$ eine Funktion in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{Supp}(g) = [-1, 1]$ und $g(x) > 0$ für $-1 < x < 1$.

(c) Sei $R > 0$. Setze $h_1(x) = f\big((R+1)^2 - x^2\big)$ und $h_2(x) = f(x^2 - R^2)$. Dann $h_1(x) + h_2(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist

$$\chi(x) = \frac{h_1(x)}{h_1(x) + h_2(x)}$$

von der Klasse C^∞ mit $\operatorname{Supp}(\chi) = [-R-1, R+1]$ und $\chi(x) = 1$ für $-R \leq x \leq R$.

16.3 Satz. *Sei* $X \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt und seien* $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}^n$ *offen mit* $X \subset A_1 \cup \dots \cup A_m$. *Dann existiert eine der Überdeckung* $A_1, \dots, A_m$ *untergeordnete Zerlegung der Eins.*

17. Integration von Formen

17.1 Bemerkung. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann ist M eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Ferner besitzt M einen Atlas, der aus der einzigen Karte id_M besteht, ist also insbesondere orientierbar. In Zukunft werden wir immer diesen Atlas benutzen, wenn wir eine n-Form auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ betrachten.

17.2 Definition. In der Situation von Bemerkung 17.1 seien $A \subset M$ kompakt und $\omega \in \Omega^n(M)$. Dann ist ω von der Gestalt $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ und wir setzen

$$\int_A \omega = \int_A f \, d\lambda^n.$$

17.3 Definition. Sei M eine orientierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$. Wenn ein orientierter Atlas $\mathcal{A}$ von M gewählt wurde, so ist M *orientiert.* Eine Karte φ derart, dass $\tau(\varphi, \psi)$ für jedes $\psi \in \mathcal{A}$ orientierungstreu ist, bezeichnet man als *positiv orientiert.*

17.4 Definition. Seien $\subset \mathbb{R}^N$ offen, $M \subset U$ eine n-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit, $A \subset M$ kompakt und $\omega \in \Omega^n(U)$. Es gebe ferner eine positiv orientierte Karte $\varphi \colon W \to V$ von M mit $A \subset V$. Dann setzen wir

$$\int_A \omega = \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^*(\omega). \tag{17.1}$$

17.5 Bemerkung. Sei $M = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^N$. Dann ist $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to M$, $x \mapsto (x, 0)$, eine Karte. Wir legen fest, dass sie positiv orientiert ist. Sei $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^N)$ von der speziellen Gestalt $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge x_n$. Dann $\varphi^*(\omega) = f\, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$ und wir haben für jedes kompakte $A = B \times \{0\} \subset M$

$$\int_A \omega = \int_B f(y_1, \ldots, y_n, 0, \ldots, 0) d\lambda^n(y).$$

Wenn wir annehmen, dass f kompakten Träger hat und die Komponenten wieder alle mit x_j bezeichnen, dann

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} f(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

17.6 Satz. *Das Integral in (17.1) hängt nicht von der Wahl der Karte φ ab.*

17.7 Lemma. *Sei M eine orientierte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und sei $A \subset M$ kompakt. Dann gibt es Karten $\varphi_j \colon W_j \to V_j$, $j = 1, \dots, m$ von M, so dass $A \subset \bigcup_{j=1}^m V_j$.*

17.8 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, sei M eine n-dimensionale, orientierte Untermannigfaltigkeit, sei $A \subset M$ kompakt und sei $\omega \in \Omega^N(U)$. Seien ferner $V_1, \dots, V_m$ wie in Lemma 17.7 und sei $(g_j)_{j=1,\dots m}$ eine der Überdeckung $V_1, \dots, V_m$ untergeordnete Zerlegung der Eins auf A. Dann setzen wir

$$\int_A \omega = \sum_{j=1}^m \int_{\operatorname{Supp}(g_j) \cap A} g_j \cdot \omega.$$

17.9 Satz. *Obige Definition ist unabhängig von der Wahl der Karten und der Zerlegung.*

17.10 Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n-dimensionale, orientierte Untermannigfaltigkeit, sei $T \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $P \subset T$ kompakt und sei $\varphi \colon T \to M$ glatt. Wir bezeichnen φ als *Parametrisierung* von M, wenn

(a) $\varphi(P) = M$.

(b) Die Einschränkung $\varphi \colon \mathring{P} \to M$ ist eine positiv orientierte Karte von M.

(c) $\lambda^n(\partial P) = 0$.

17.11 Lemma. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\Phi \colon U \to V$ von der Klasse C^1, sei $K \subset U$ kompakt und sei $A \subset K$ eine Lebesgue-Nullmenge. Dann $\lambda^n(\Phi(A)) = 0$.*

17.12 Lemma. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $\varphi \colon P \to M$ eine Parametrisierung von M. Dann gibt es zu jedem $j \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung $\chi_0^{(j)}, \dots, \chi_{m(j)}^{(j)}$ der Eins auf M, so dass folgendes gilt*

(a) zu jedem $x \in M \setminus \varphi(\partial M)$ existiert j_0, so dass $\chi_0^{(j)}(x) = 1$ für alle $j \geq j_0$,

(b) für jede offene Obermenge U von M, jedes $\omega \in \Omega^n(U)$ und jedes kompakte $A \subset M$ gilt

$$\lim_{j \to \infty} \int_A (1 - \chi_0^{(j)})\omega = 0.$$

17.13 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, sei $M \subset U$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit und sei $\varphi \colon T \to M$ eine Parametrisierung von M. Es sei $A \subset M$ kompakt und es sei $\omega \in \Omega^n(U)$. Dann*

$$\int_A \omega = \int_{\varphi^{-1}(A) \cap \mathring{P}} \varphi^*(\omega). \tag{17.2}$$

17.14 Beispiel. Seien $U = \mathbb{R}$, $P = [0, 2\pi]$, und sei $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\varphi(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist φ eine Parametrisierung der S^1. Die Koordinaten heißen x und y. Wir berechnen $\int_{S^1} x^2 dy$.

Es ist

$$\varphi^*(x^2 dy)(t) = \cos(t)^2 \frac{d \sin(t)}{dt} dt = \cos(t)^3 dt.$$

Also

$$\int_{S^1} x^2 dy = \int_{(0,2\pi)} \varphi^*(x^2 dy) = \int_{(0,2\pi)} \cos(t)^3 d\lambda^1(t) = 0.$$

Bemerkung. In diesem Kapitel wurde nicht verwendet, dass ω glatt ist. Stetigkeit hätte beispielsweise gereicht.

18. Der Satz von Stokes

18.1 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, sei $M \subset U$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit und sei $\omega \in \Omega^n(U)$ von der Form $\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_n} f_{i_1,\dots,i_n} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$. Dann ist der *Träger* von ω definiert als $\mathrm{Supp}(\omega) = \bigcup_{i_1<\cdots<i_n} \mathrm{Supp}(f_{i_1,\dots,i_n})$.

18.2 Lemma. *Wenn* $\omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ *kompakten Träger hat, dann*

$$\int_{\mathbb{R}^n_-} d\omega = \int_{\partial\mathbb{R}^n_-} \omega.$$

18.3 Bemerkung. Der Beweis zeigt, dass $\int_{\partial\mathbb{R}^n_-} f\, dx_I = 0$, falls $1 \in I$.

18.4 Korollar. *Die Differentialform* $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ *habe kompakten Träger. Dann* $\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0$.

18.5 Theorem (Integralsatz von Stokes). *Sei* $U \subset \mathbb{R}^N$ *offen, sei* $M \subset U$ *eine orientierte,* n*-dimensionale Untermannigfaltigkeit und sei* $\omega \in \Omega^{n-1}(U)$. *Sei* X *eine* n*-dimensionale, abgeschlossene, berandete Untermannigfaltigkeit von* M. *Es sei* X *kompakt, und* ∂X *trage die induzierte Orientierung. Dann*

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega.$$

18.6 Definition. Eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ heißt *geschlossen*, wenn sie kompakt und ohne Rand ist.

18.7 Korollar. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^N$ *offen und* $\omega \in \Omega^{n-1}(U)$. *Wenn* $M \subset U$ *eine geschlossene, orientierte,* $(n-1)$*-dimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^N$ *ist, dann*

$$\int_M d\omega = 0.$$

Bemerkung. Die Version mit $n = N$ bezeichnet man auch als *Gaußschen Integralsatz.*

18.8 Beispiel. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, berandete n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit der Standardorientierung. Für $\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$ gilt $d\omega = n dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Daher folgt aus dem Satz von Stokes

$$\lambda^n(X) = \frac{1}{n} \int_{\partial X} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

18.9 Beispiel. Wir integrieren $\omega = y(x^2+y^2+z^2)^3 dx \wedge dz$ über die S^2. Dazu verwenden wir die aus den Kugelkoordinaten gewonnene Parametrisierung

$$\psi\colon \mathbb{R}^2 \to S^2, \qquad (\varphi,\theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

mit $P = [-\pi,\pi] \times [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Es gilt

$$\begin{aligned}\psi^*(\omega) &= \sin\varphi\cos\theta(-\sin\varphi\cos\theta\, d\varphi - \sin\varphi\sin\theta\, d\theta) \wedge \cos\theta\, d\theta \\ &= -\sin^2\varphi\cos^3\theta\, d\varphi \wedge d\theta.\end{aligned}$$

Also

$$\int_{S^2} \omega = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\varphi\cos^3\theta\, d\varphi\, d\theta = -\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta = -\frac{4}{3}\pi.$$

Die S^2 berandet die abgeschlossene Einheitskugel $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$. Wir vergleichen das Ergebnis mit $\int_B d\omega$. Dazu müssen wir zuerst untersuchen, ob ψ diejenige Orientierung auf der S^2 induziert, die von der Identität von B herkommt. Sei dazu

$$\Phi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} (r+1)\cos\varphi\cos\theta \\ (r+1)\sin\varphi\cos\theta \\ (r+1)\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Setzt man $W = \{(r,\varphi,\theta) \mid r > -1,\ -\pi < \varphi < \pi,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ und $V = \mathbb{R}^3 \setminus (-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbb{R}$. Dann ist $\Phi\colon W \to V$ eine Karte. Wegen $\det(D\Phi) = (r+1)^2\cos\theta > 0$ ist sie positive orientiert. Sie ist randadapiert und es gilt $\psi(\varphi,\theta) = \Phi(0,\varphi,\theta)$. Also induziert Φ dieselbe Orientierung auf S^2 wie ψ.

Es gilt $d\omega = -\left((x^2+y^2+z^2)^3 + 6y(x^2+y^2+z^2)^2\right) dx \wedge dy \wedge dz$. Also

$$\begin{aligned}\int_B d\omega &= \int_0^1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\pi}^{\pi} (r^6 + 6r^6\sin^2\varphi\cos^2\varphi)r^2\cos\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr \\ &= \int_0^1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\pi r^8\cos\theta + 6\pi r^8\cos^3\theta) d\varphi\, d\theta \\ &= \int_0^1 \left(4\pi r^8 + 6\cdot\frac{4}{3}\pi r^8\right) dr = \int_0^1 12\pi r^8 dr = \frac{4}{3}\pi.\end{aligned}$$

19. Die klassischen Integralsätze

19.1 Satz (Greensche Formel). *Sei* $U \subset \mathbb{R}^2$ *offen, sei* $X \subset U$ *eine abgeschlossene, berandete, orientierte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit und seien* $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ *glatt. Dann*

$$\int_{\partial X} (f\,dx + g\,dy) = \int_X \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) d\lambda^2.$$

Das Integral über ∂X kann im Fall der Greenschen Formel als Wegintegral bestimmt werden. Um den Gaußschen Satz in höheren Dimensionen in der klassischen Form hinzuschreiben, wird ein Maß für die Oberfläche benötigt.

19.2 Bemerkung. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$. Dann ist $A^T A$ positiv semidefinit. Es existiert also $\sqrt{\det(A^T A)} \in \mathbb{R}$.

19.3 Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n-dimensionale Unermannigfaltigkeit, sei $A \subset M$ kompakt, seien $\varphi_j\colon W_j \to V_j$, $j = 1, \dots, m$, Karten von M mit $A \subset \bigcup_{j=1}^m V_j$ und sei $g_1, \dots, g_m$ eine untergeordnete Zerlegung der Eins von A. Dann setzen wir

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{m} \int_{\varphi_j^{-1}(A\cap \operatorname{Supp}(g_j))} g_j \sqrt{\det((D\varphi_j)^T D\varphi_j)} d\lambda^n. \tag{19.1}$$

19.4 Lemma. *Der Wert* $\mu(A)$ *in (19.1) hängt nicht von der Wahl der Karten oder der Zerlegung ab.*

19.5 Bezeichnung. Aus dem Maßfortsetzungssatz folgt die Existenz einer σ-Algebra $\mathcal{S}_M$ und eines Maßes λ_M auf M, so dass $\lambda_M(A) = \mu(A)$ für alle kompakten Teilmengen von A. Dabei enthält $\mathcal{S}$ alle Borelmengen.

Wir zitieren Korollar 3.14 aus der Linearen Algebra II von Herrn Köhler.

19.6 Satz (Binet-Cauchy). *Für* $A \in K^{n\times m}$ *und* $B \in K^{m\times n}$ *und* $n \leq m$ *ist*

$$\det(AB) = \sum_{\substack{L\subset 1,\dots,m\\ |L|=n}} \det\left((a_{j,\ell})_{\substack{j=1,\dots,n\\ \ell\in L}} \right) \det\left((b_{\ell,j})_{\substack{j=1,\dots,n\\ \ell\in L}} \right).$$

Beispiel. $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

19.7 Satz. *Sei* $M \subset \mathbb{R}^3$ *eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit, sei* $A \subset M$ *kompakt, seien* $\varphi_j \colon W_j \to V_j$, $j = 1, \dots, m$, *Karten von* M *mit* $A \subset \bigcup_{j=1}^m V_j$ *und sei* $g_1, \dots, g_m$ *eine untergeordnete Zerlegung der Eins von* A. *Dann*

$$\lambda_M(A) = \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(A)} g_j \circ \varphi_j \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right\|_2 d\lambda^2.$$

19.8 Beispiel. Im Fall $n = 2$ bezeichnet man das Maß $d\lambda_M$ auch als *Oberflächenmaß.* Wir berechnen das Oberflächenmaß der S^2 in Kugelkoordinaten

$$\Phi \colon \mathbb{R}^2 \to S^2, \quad (\varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Dann

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos\varphi\cos\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos^2\theta \\ \sin\varphi\cos^2\theta \\ \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Also mit doppelter Anwendung des trigonometrischen Pythogoras

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\|_2 = \sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta.$$

19.9 Satz. *Sei* $f \colon M \to \mathbb{R}$ λ_M*-integrierbar. Dann*

$$\int f \, d\lambda_M = \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(A \cap \operatorname{Supp}(g_j))} (g_j \circ \varphi_j)(f \circ \varphi_j) \sqrt{\det((D\varphi_j)^T D\varphi_j)} \, d\lambda^n.$$

19.10 Lemma. *Für* $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ *gilt* $\det(u, v, w) = \langle u, (v \times w) \rangle$.

19.11 Bemerkung. Wir hatten den Normalenraum $N_a(M)$ an eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ in einem Punkt $a \in M$ als das Orthogonalkomplement von $T_a(M)$ definiert. Wenn X eine berandete, n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist, dann $\dim N_a(\partial X) = 1$ für alle $a \in \partial X$, es gibt also genau zwei Einheitsnormalen, die wir als *innere* und *äußere* Einheitsnormale bezeichnen.

Sei nun $n = 3$ und sei $\Phi \colon W \to V$ eine randadaptierte Karte von X. Wir bezeichnen die Koordinaten des $\mathbb{R}^3$ mit (t, x, y). Dann ist $\varphi \colon (x, y) \mapsto \Phi(0, x, y)$ eine positiv orientierte Karte von ∂X. Sei ξ, η bestimmt durch $\varphi(\xi, \eta) = a$. Dann ist

$$\nu_a = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, \xi, \eta) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, \xi, \eta) \right\|_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, \xi, \eta) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, \xi, \eta)$$

der äußere Normalenvektor. Um zu sehen, dass es sich um den äußeren handelt, setzen wir $g(s) = \langle \nu_a, \Phi(s, \xi, \eta) \rangle$ und $c = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, \xi, \eta) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, \xi, \eta) \right\|_2$. Dann

$$g'(0) = \frac{1}{c} \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x}(0, \xi, \eta) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(0, \xi, \eta),\ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, \xi, \eta) \right\rangle = \frac{1}{c} \det(D\Phi(0, \xi, \eta)) > 0.$$

Also zeigt ν_a in der Tat aus X hinaus. Die Abbildung $\nu\colon \partial X \to \mathbb{R}^3$, $a \mapsto \nu_a$, ist das *nach außen gerichtete Einheitsnormalenfeld.*

19.12 Theorem (Divergenzsatz). *Sei* U *offen im* $\mathbb{R}^3$*, sei* $X \subset U$ *eine kompakte, dreidimensionale Untermannigfaltigkeit und sei* $F\colon U \to \mathbb{R}^3$ *ein glattes Vektorfeld. Sei* ν *das nach außen gerichtete Einheitsnormalenfeld auf* ∂X*. Dann*

$$\int_X \operatorname{div}(F)\, d\lambda^3 = \int_{\partial X} \langle F, \nu \rangle\, d\lambda_{\partial X}.$$

20. Der Brouwersche Fixpunktsatz

20.1 Lemma. *Sei* $n \geq 2$. *In* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *betrachten wir die* $(n-1)$*-Form*

$$\sigma = \frac{1}{\|x\|_2^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} x_j \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Dann $d\sigma = 0$ *und* $\int_{S^{n-1}} \sigma \neq 0$.

20.2 Lemma. *Sei* U *eine offene Obermenge der abgeschlossenen Einheitskugel* $\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ *und sei* $\rho\colon U \to S^{n-1}$ *eine glatte Abbildung. Dann existiert* $x \in S^{n-1}$ *mit* $\rho(x) \neq x$.

20.3 Lemma. *Für* $r > 1$ *sei* $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < r\}$. *Es sei* $f\colon B(r) \to \overline{B}$ *eine glatte Abbildung. Dann besitzt* f *einen Fixpunkt.*

20.4 Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Sei* $f\colon \overline{B} \to \overline{B}$ *stetig. Dann besitzt* f *einen Fixpunkt.*

20.5 Korollar. *Sei* W *homöomorph zu* $\overline{B}$ *und sei* $f\colon W \to W$ *stetig. Dann besitzt* f *einen Fixpunkt.*

20.6 Satz. $K \subset \mathbb{R}^n$ *sei kompakt und konvex und besitze mindestens einen inneren Punkt. Dann ist* K *homöomorph zur abgeschlossenen Einheitskugel* $\overline{B}$ *des* $\mathbb{R}^n$.

20.7 Satz (Satz von Frobenius und Perron). *Sei* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *eine Matrix, deren sämtliche Einträge nichtnegativ sind. Dann besitzt* A *einen Eigenvektor mit nichtnegativen Einträgen.*