

Analysis I

Rüdiger W. Braun

Wintersemester 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Mengen und Abbildungen	5
2	Die reellen Zahlen	7
2.1	Körperaxiome	7
2.2	Anordnungsaxiome	8
2.3	Vollständigkeitsaxiom	9
3	Natürliche Zahlen und vollständige Induktion	11
4	Folgen und ihre Grenzwerte	13
5	Reihen	17
5.1	Konvergenz	17
5.2	Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen	19
5.3	Dezimaldarstellung	19
5.4	Absolut konvergente Reihen	20
6	Stetige Funktionen	21
7	Die komplexen Zahlen	24
8	Elementare Funktionen	27
8.1	Exponentialfunktion	27
8.2	Der Logarithmus	28
8.3	Die allgemeine Potenzfunktion	28
8.4	Trigonometrische Funktionen	28
8.5	Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen	30
8.6	Polarkoordinaten	31
8.7	Landau-Symbole	31
9	Differenzierbarkeit	32
10	Der Mittelwertsatz	35
11	Integralrechnung	39
12	Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen	46

Inhaltsverzeichnis

13 Potenzreihen	48
14 Integrale rationaler Funktionen	51
15 Taylor-Reihen	53
16 Uneigentliche Integrale	57
17 Die Gammafunktion	59

1 Mengen und Abbildungen

1.1 Definition. Eine Menge ist eine Zusammenfassung *verschiedener* Elemente zu einem Ganzen. Es muss prinzipiell entscheidbar sein, ob ein Element zu einer Menge gehört.

Man kann hier sehr viel formaler werden. Das interessiert aber keinen Analytiker.

1.2 Notation. Es gibt zwei Methoden, Mengen hinzuschreiben:

- (a) Durch Aufzählung $M_1 = \{1, 5, 17\}$, $M_2 = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$.
- (b) Durch Angabe einer charakterisierenden Eigenschaft: $M_3 = \{n \mid n \text{ gerade}\}$,
 $M_4 = \{p \mid p \text{ und } 2^p - 1 \text{ Primzahlen}\}$.
- (c) Wichtige Mengen, deren Existenz wir à priori hinnehmen:
 - (i) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die natürlichen Zahlen,
 - (ii) $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,
 - (iii) $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ die ganzen Zahlen,
 - (iv) $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ die rationalen Zahlen,
 - (v) \mathbb{R} die reellen Zahlen. Eine genauere Beschreibung der reellen Zahlen folgt später.

1.3 Definition. Eine Menge A ist *Teilmenge* einer Menge B , wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Man schreibt $A \subseteq B$.

1.4 Beispiel. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Von den beiden Mengen $\{1, 2\}$ und $\{2, 3\}$ ist keine Teilmenge der anderen.

1.5 Bemerkung. Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

1.6 Definition. Die Menge, die gar kein Element enthält, heißt *leere Menge*. Sie wird mit \emptyset bezeichnet.

1.7 Definition. Seien M_1 und M_2 zwei Mengen. Dann sind die folgenden Verknüpfungen erklärt:

- (a) $M_1 \cup M_2 = \{x \mid x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$ (Vereinigung),

1 Mengen und Abbildungen

(b) $M_1 \cap M_2 = \{x \mid x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$ (Durchschnitt),

(c) $M_1 \setminus M_2 = \{x \mid x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$ (Differenz),

(d) $M_1 \Delta M_2 = (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$ (symmetrische Differenz).

1.8 *Beispiel.* $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N} \cap \{0\} = \emptyset$, $\emptyset \Delta M = M$ für jede Menge M .

1.9 *Bemerkung.* Kommutativgesetz, Assoziativgesetz und Distributivgesetz für Mengen.

Die Beweise aller dieser Aussagen beruhen auf den Gesetzen der Logik. Ich führe sie nicht vor, weil sie bereits im Vorkurs gemacht wurden.

1.10 **Definition.** Sei X eine Menge. Die Menge $\mathcal{P}(X) = \{M \mid M \subseteq X\}$ heißt *Potenzmenge* von X .

1.11 *Beispiel.* $X = \{1, 2, 3\}$, dann hat $\mathcal{P}(X)$ die folgenden acht Elemente:

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Diese Menge ist nicht leer.

1.12 **Definition.** Seien X, Y Mengen. Die Menge $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}$ heißt *kartesisches Produkt* der Mengen X und Y . Die Elemente von $X \times Y$ heißen *Paare*.

1.13 *Beispiel.* Für $X = \{1, 2, 3\}$ schreibe ich X^2 hin. Diese Menge hat neun Elemente.

1.14 **Definition.** Gegeben seien Menge X und Y . Eine *Abbildung* $f: X \rightarrow Y$ besteht aus dem *Definitionsbereich* X , dem *Zielbereich* Y und einer Vorschrift, die jedem Element aus X genau ein Element $y = f(x)$ aus Y zuordnet.

Eine Frage ist, ob zwei Abbildungen, die denselben Definitionsbereich und dieselbe Vorschrift besitzen, als gleich anzusehen sind. Algebraiker sind da steng und sagen "nein". Das ist auch der Inhalt der Definition. Analytiker sind oft geneigt, unterschiedliche Zielbereiche zu ignorieren.

1.15 **Definition.** Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung, seien $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$.

(a) $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$ heißt *Bild* von M unter f .

(b) $f^{-1}(N) = \{x \mid f(x) \in N\}$ heißt *Urbild* von N unter f .

(c) Für $y \in Y$ schreibt man häufig $f^{-1}(y)$ anstatt $f^{-1}(\{y\})$.

1.16 *Beispiel.* $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, $f: X \rightarrow Y$, $f(x) = x^2$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Dann $f(A) = \{1, 4\}$, $f^{-1}(B) = \{1, 2\}$ und $f^{-1}(5) = \emptyset$.

1.17 **Definition.** Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ zwei Abbildungen. Die *Verknüpfung* ist definiert als $g \circ f: X \rightarrow Z$, $g \circ f(x) = g(f(x))$.

1.18 *Beispiel.* $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$. Dann $f \circ f(3) = 81$.

2 Die reellen Zahlen

Die *reellen Zahlen* sind eine Menge \mathbb{R} zusammen mit zwei Rechenvorschriften, die je zwei Elementen $x, y \in \mathbb{R}$ ein Element $x + y \in \mathbb{R}$ und ein Element $x \cdot y \in \mathbb{R}$ zuordnen, und einer Vergleichsrelation $>$, so dass die in den nächsten drei Unterabschnitten angegebenen Axiome erfüllt sind.

2.1 Körperaxiome

- (a) (Kommutativgesetze) $x + y = y + x$ und $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- (b) (Assoziativgesetze) $(x + y) + z = x + (y + z)$ und $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- (c) (Null und Eins) Es gibt Elemente $0, 1 \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq 1$ und $0 + x = x$ und $1 \cdot x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (d) (Inverses Element der Addition) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0$.
Es zeigt sich, dass y eindeutig bestimmt ist; man bezeichnet es mit $-x$.
- (e) (Inverses Element der Multiplikation) Zu jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es eine Zahl $z \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot z = 1$.
Es zeigt sich, dass z eindeutig bestimmt ist. Man schreibt $z = x^{-1}$ oder $z = \frac{1}{x}$.
- (f) (Distributivgesetz) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

2.1 Satz. *Das Nullelement ist eindeutig.*

2.2 Satz. *Das Einselement ist eindeutig.*

2.3 Satz. *Das additiv Inverse und das multiplikativ Inverse sind eindeutig.*

Beweis. Zur Abwechslung für die Multiplikation. Sei $x \neq 0$ und seien $w, z \in \mathbb{R}$ Elemente mit $x \cdot w = 1 = z \cdot w$. Dann

$$w = 1 \cdot w = w \cdot 1 = w \cdot (x \cdot z) = (w \cdot x) \cdot z = (x \cdot w) \cdot z = 1 \cdot z = z. \quad \square$$

2.4 Satz. $0 \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Daraus folgt dann

2 Die reellen Zahlen

2.5 Satz. $(-1) \cdot x = -x$.

2.6 Satz. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $-(-x) = x$. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gelten $x^{-1} \neq 0$ und $(x^{-1})^{-1} = x$.

2.7 Satz (Nullteilerfreiheit). Wenn $x \cdot y = 0$, dann $x = 0$ oder $y = 0$.

Arithmetische Beziehungen, die man durch bloßes Ausrechnen nachweist, wie etwa die binomischen Formeln, werden in der Vorlesung nicht noch einmal bewiesen.

2.2 Anordnungsaxiome

Es gibt eine Teilmenge P von \mathbb{R} , welche die beiden folgenden Axiome erfüllt:

(a) (Trichotomie) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei folgenden Möglichkeiten

$$x \in P, x = 0 \text{ oder } -x \in P$$

(b) (Abgeschlossenheit bezüglich Addition und Multiplikation) Sind x und y in P , dann auch $x + y$ und $x \cdot y$.

Statt $x \in P$ schreibt man $x > 0$, statt $-x \in P$ schreibt man $x < 0$. Ferner schreibt man $x < y$, falls $y - x > 0$, und $x \leq y$, falls $x < y$ oder $x = y$. Analog definiert man $>$ und \geq .

Falls $x > 0$, so heißt x *positiv*, falls $x < 0$, so heißt x *negativ*.

2.8 Satz. Seien $x, y > 0$, $u, v < 0$ und $z \in \mathbb{R}$. Dann gelten

(a) $xy > 0$,

(b) $uv > 0$,

(c) $xu < 0$,

(d) $z^2 \geq 0$,

(e) $z^2 > 0$, vorausgesetzt $z \neq 0$,

(f) $1 > 0$,

(g) $x^{-1} > 0$,

(h) $u^{-1} < 0$.

2.9 Satz. Falls $x < y$ und $z \in \mathbb{R}$ beliebig, so gilt $x + z < y + z$.

2.10 Satz. (a) Falls $x < y$ und $z > 0$, so gilt $xz < yz$.

(b) Falls $x < y$ und $z < 0$, so gilt $xz > yz$.

2.11 Satz. Ist $0 < x < y$, so gilt $x^2 < y^2$.

Sind umgekehrt x und y beide positiv und ist $x^2 < y^2$, so folgt $x < y$.

2.12 Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man den *Absolutbetrag* als

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

2.13 Satz. Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt $|x \cdot y| = |x||y|$.

Beispiel. Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|3x - 6| = |8 - x|$.

Es gibt zwei Fälle: Im ersten Fall lautet die Gleichung $3x - 6 = 8 - x$, ihre Lösung ist $x = \frac{7}{2}$, im zweiten lautet sie $3x - 6 = -(8 - x)$ mit der Lösung $x = x - 1$.

Die beiden Lösungen der Gleichung sind $x = \frac{7}{2}$ und $x = -1$.

2.14 Satz (Dreiecksungleichung). Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt $|x + y| \leq |x| + |y|$.

2.3 Vollständigkeitsaxiom

2.15 Satz. Es gibt kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.

2.16 Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt M *nach oben beschränkt*, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq c$ für alle $x \in M$. Jedes c mit dieser Eigenschaft heißt *obere Schranke* von M .

M heißt *nach unten beschränkt*, wenn es ein $d \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \geq d$ für alle $x \in M$. Jedes d mit dieser Eigenschaft heißt *untere Schranke* von M .

M heißt *beschränkt*, wenn es nach oben und unten beschränkt ist.

2.17 Beispiel. $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$. Dann ist M beschränkt. Eine obere Schranke ist $c = \frac{3}{2}$ und eine untere Schranke ist $-\frac{3}{2}$.

2.18 Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Wenn es ein $c \in M$ gibt, welches obere Schranke von M ist, so bezeichnet man c als das *Maximum* von M , in Zeichen $c = \max M$. In diesem Fall ist c das größte Element von M . Wenn M ein kleinstes Element hat, so bezeichnet man es als *Minimum* und schreibt $\min M$ dafür.

2.19 Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Wenn es eine kleinste obere Schranke von M gibt, dann bezeichnet man sie als *Supremum* von M , in Zeichen $\sup M$. Wenn es eine größte untere Schranke gibt, so bezeichnet man sie als *Infimum* von M , in Zeichen $\inf M$.

Beispiel. Sei $M = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist M nach oben und unten beschränkt und besitzt kein Maximum. Ferner: $\sup M = 1$ und $\inf M = \min M = 0$.

2 Die reellen Zahlen

2.20 Satz. $M \subseteq \mathbb{R}$ sei nach oben beschränkt. Für $c \in \mathbb{R}$ sind äquivalent:

- (a) $c = \sup M$.
- (b) c ist obere Schranke von M und kein $d < c$ ist ebenfalls obere Schranke von M .
- (c) Für alle $x \in M$ gilt $x \leq c$ und für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $x \in M$ mit $x > c - \epsilon$.

2.21 Vollständigkeitsaxiom. Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} besitzt in \mathbb{R} ein Supremum.

Zwei verschiedene Methoden, die reellen Zahlen aus den rationalen zu konstruieren, findet man in §15 des Buchs von Kavallo.

2.22 Bemerkung. $M \subseteq \mathbb{R}$ sei nach oben beschränkt. M besitzt genau dann ein Maximum, wenn $\sup M \in M$. In diesem Fall $\max M = \sup M$. Die analoge Aussage für das Minimum gilt ebenfalls.

2.23 Satz. Zu jedem $a > 0$ existiert genau ein $b > 0$ mit $b^2 = a$.

Dieses b heißt Quadratwurzel von a , in Zeichen $b = \sqrt{a}$.

2.24 Definition. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ definieren wir die folgenden Intervalle:

$$\begin{array}{ll} [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} &]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\ [a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} &]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ [a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} &]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}. \\]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} &]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \end{array}$$

2.25 Beispiel. $\{x \in \mathbb{R} \mid x - x^2 \leq 0\} =]-\infty, 0] \cup [1, \infty[$.

Es ist nämlich $x - x^2 = x(1 - x) \leq 0$, wenn einer der Faktoren ≥ 0 und der andere ≤ 0 ist.

3 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

3.1 Definition. Eine Teilmenge N von reellen Zahlen heißt *induktiv*, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (a) $1 \in N$,
- (b) wenn $n \in N$, dann auch $n + 1 \in N$.

\mathbb{R} selbst ist induktiv. Der Durchschnitt induktiver Mengen ist induktiv. Daher gibt es eine kleinste induktive Teilmenge von \mathbb{R} . Es handelt sich um die Menge der natürlichen Zahlen. Das Zeichen dafür ist \mathbb{N} .

3.2 Prinzip der vollständigen Induktion. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Wenn es gelingt, die folgenden beiden Dinge zu zeigen, dann gilt $A(n)$ für alle n :

- (a) $A(1)$ gilt,
- (b) wenn $A(n)$ gilt, dann auch $A(n + 1)$.

3.3 Definition. Sei X eine Menge und sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element $a_n \in X$ gegeben. Dann bezeichnet man die Aufzählung dieser a_n als *Folge*, in Zeichen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder (a_1, a_2, a_3, \dots) .

Folgen werden häufig *rekursiv* definiert. Man definiert dazu a_1 und gibt eine Regel an, wie aus a_n das Folgenglied a_{n+1} berechnet wird. Alternativ kann man a_{n+1} auch aus a_1, \dots, a_n berechnen.

3.4 Beispiel. (a) Fakultät: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = (n + 1) \cdot a_n$. Das definiert $n! = a_n$.

(b) Fibonacci-Folge: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n \geq 2$.

(c) Summenzeichen: Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\sum_{j=1}^1 a_j = a_1, \quad \sum_{j=1}^{n+1} a_j = a_{n+1} + \sum_{j=1}^n a_j.$$

(d) Produktzeichen: Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\prod_{j=1}^1 a_j = a_1, \quad \prod_{j=1}^{n+1} a_j = a_{n+1} \cdot \prod_{j=1}^n a_j.$$

3 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

3.5 Satz (Bernoulli-Ungleichung). Sei $h > -1$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

Beweis. mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang $n = 1$:

$$(1 + h)^1 = 1 + 1 \cdot h.$$

Induktionsschluss: Die Aussage sei richtig für n , dann müssen wir sie für $n + 1$ herleiten:

$$(1 + h)^{n+1} = (1 + h) \cdot (1 + h)^n \geq (1 + h) \cdot (1 + nh) = 1 + h + nh + h^2 \geq 1 + (n + 1)h. \quad \square$$

3.6 Satz (Archimedisches Axiom). Ist $a \in \mathbb{R}$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$.

3.7 Satz (Eudoxos). Zu jedem $b > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b$.

4 Folgen und ihre Grenzwerte

4.1 Satz (Arithmetische und geometrische Progression). :

$$(a) \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) Für jedes $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$ gilt

$$\sum_{j=0}^n q^j = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

4.2 Definition. Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ definiert man den *Binomialkoeffizienten* durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

4.3 Satz. Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ gilt

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Insbesondere sind alle Binomialkoeffizienten ganz.

4.4 Satz (Binomischer Lehrsatz). Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

4.5 Definition. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist *beschränkt*, wenn die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

4.6 Beispiel. (a) Für jedes $a \neq 0$ ist die Folge $(a \cdot n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt.

(b) Für jedes $q \in [-1, 1]$ ist die Folge $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach unten beschränkt durch -1 und nach oben durch 1 .

(c) Für jedes $q \in]-1, 1[$ ist die Folge $(nq^n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

(d) Für jedes $q \in]-1, 1[$ ist die Folge $(n^2q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

4 Folgen und ihre Grenzwerte

4.7 Definition. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, und sei $b \in \mathbb{R}$. Die Folge heißt *konvergent* gegen b , falls gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - b| < \epsilon$.

Man sagt dann, b sei der *Grenzwert* der Folge, und schreibt $b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $a_n \rightarrow b$.

Eine Folge heißt *divergent*, wenn sie keinen Grenzwert besitzt.

4.8 Beispiel. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2}$. Da wir noch keine Rechenregeln für Grenzwerte haben, beweisen wir die Konvergenz zu Fuß.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{N} < 4\epsilon$. Dann gilt für jedes $n \geq N$

$$\left| \frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n+2 - (2n+3)}{4n+6} \right| = \frac{1}{4n+6} \leq \frac{1}{4N} < \epsilon.$$

4.9 Satz. Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.

4.10 Satz. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

4.11 Satz (Sandwichsatz). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_n \leq b_n \leq c_n$. Wenn die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert L konvergieren, dann $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

4.12 Beispiel. (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

(b) Sei $q \in \mathbb{R}$.

(i) Falls $|q| < 1$, so gilt $\lim q^n = 0$.

(ii) Falls $|q| > 1$, so divergiert die Folge $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$.

(iv) Die Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert.

4.13 Bemerkung. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ heißt *Nullfolge*.

4.14 Satz (Rechenregeln). Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$.

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$.

(d) Ist $b \neq 0$, dann $b_n \neq 0$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

4.15 *Beispiel.* Sei $q \in]-1, 1[$. Dann $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2q^n = 0$.

Beispiel.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{n}{4})(1 + \frac{n}{4})}{n^2 + 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 (\frac{1}{n} - \frac{1}{4})(\frac{1}{n} + \frac{1}{4})}{n^2 (1 + \frac{3}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{n} - \frac{1}{4})(\frac{1}{n} + \frac{1}{4})}{1 + \frac{3}{n^2}} \\ &= \frac{(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{4})(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{4})}{1 + 3(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n})^2} = -\frac{1}{16}. \end{aligned}$$

4.16 **Satz.** Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ und $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann $a \leq b$.

4.17 **Definition.** Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend*, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sie heißt *streng monoton wachsend*, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Analog definiert man (streng) monoton fallend.

4.18 **Satz.** Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt, so konvergiert die Folge und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

4.19 *Beispiel.* Sei $x > 0$. Wähle ein beliebiges $a_1 \in]0, 1/x[$ und definiere rekursiv $a_{n+1} = 2a_n - xa_n^2$. Dann gilt $\lim a_n = 1/x$.

Beweis. Wir zeigen mit vollständiger Induktion für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq 1/x.$$

Dann folgt die Existenz eines Grenzwerts b aus dem vorigen Satz. Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt $b = 2b - xb^2$. Also $b = 0$ oder $1 = 2 - xb$. Der erste Fall scheidet aus, denn $b \geq a_1 > 0$ wegen der Monotonie. Also $b = 1/x$. \square

4.20 **Definition.** Sei $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in \mathbb{N} . Ist ferner $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, so ist $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beispiel. Sei $a_n = (-1)^n$, und sei $n_k = 2k$. Dann $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (1)_{k \in \mathbb{N}}$.

4.21 **Satz.** Jede Teilfolge einer beschränkten Folge ist beschränkt und jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent.

4.22 **Theorem** (Satz von Bolzano-Weierstraß). Jede beschränkte Folge in \mathbb{R} besitzt eine konvergente Teilfolge.

4.23 **Definition.** Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$.

4.24 **Theorem** (Konvergenzkriterium von Cauchy). Für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} sind äquivalent:

4 Folgen und ihre Grenzwerte

(a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent.

(b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

4.25 Beispiele. (a) Die Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht, denn für jedes n gilt $|(-1)^{n+1} - (-1)^n| = 2$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}$. Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

5 Reihen

5.1 Konvergenz

5.1 Definition. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R} und sei $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$. Wenn die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, dann sagt man, dass die *Reihe* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert und schreibt $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ für ihren Grenzwert. Wenn $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert, so sagt man, dass die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ divergiert.

Die Zahlen s_n heißen *Partialsommen* von $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

5.2 Satz. Wenn $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert, dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Die Umkehrung gilt i. a. nicht.

5.3 Konvention. Wir setzen $x^0 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also auch für $x = 0$.

5.4 Beispiel. Sei $q \in \mathbb{R}$. Die *geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ divergiert für $|q| \geq 1$. Ansonsten gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1.$$

5.5 Beispiel. Die *harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

5.6 Beispiel. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

5.7 Satz (Konvergenzkriterium von Leibniz). Sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$.

Genauer: Sei $s_m = \sum_{n=1}^m (-1)^n b_n$ die m -te Partialsomme. Dann ist $(s_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und $(s_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend. Beide Folgen konvergieren gegen $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$.

5.8 Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergiert. Genauer gilt beispielweise

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \geq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Wir werden später sehen, dass der Grenzwert gleich dem natürlichen Logarithmus von 2 ist.

5.9 Definition. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

5 Reihen

5.10 Satz. *Absolut konvergente Reihen sind konvergent.*

5.11 Bemerkung. Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

5.12 Satz (Majorantenkriterium). *Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit $|a_n| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.*

5.13 Bemerkung. (a) Man bezeichnet dann $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ als *konvergente Majorante* von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Eine Umformulierung des Majorantenkriteriums liefert: Wenn $|a_n| \leq c_n$ für jedes n und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, dann divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. In diesem Falle bezeichnet man $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ als *divergente Minorante*.

5.14 Beispiel. (a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+5}$ divergiert. Für $n \geq 3$ gilt nämlich

$$\frac{n}{n^2+5} \geq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}.$$

Daher ist die Hälfte der harmonischen Reihe eine divergente Minorante.

5.15 Satz (Quotientenkriterium). *Es gebe ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $q \in \mathbb{R}$ mit $q < 1$, so dass $a_n \neq 0$ und $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q$ für alle $n \geq N$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

5.16 Korollar. *Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe, so dass $a_n \neq 0$ für fast alle n und so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} =: q$ existiert.*

(a) Falls $q < 1$, so konvergiert die Reihe absolut.

(b) Falls $q > 1$, so divergiert die Reihe.

5.17 Beispiel. (a) Im Fall $q = 1$ sind feinere Untersuchungen notwendig. Zu diesem Fall gehören sowohl die harmonische Reihe als auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$ konvergiert. Es gilt nämlich

$$\frac{\frac{(n+1)^4}{4^{n+1}}}{\frac{n^4}{4^n}} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^4 \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4} < 1.$$

5.18 Definition. Die *Exponentialfunktion* ist definiert durch

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Das Quotientenkriterium zeigt, dass diese Reihe in der Tat konvergiert.

5.2 Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen

5.19 Definition. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist *injektiv*, wenn es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt. Sie heißt *surjektiv*, wenn es zu jedem $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt. Sie heißt *bijektiv*, wenn es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

5.20 Bemerkung. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Setze $W = \{f(x) \mid x \in X\}$ und definiere eine neue Abbildung $g: X \rightarrow W$ mit derselben Vorschrift $g(x) = f(x)$ für alle $x \in X$. Dann ist g surjektiv.

5.21 Beispiel. Die Quadratfunktion $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, ist weder injektiv noch surjektiv, die Nullabbildung $0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$, auch nicht. Die Identität $\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$, ist bijektiv. Wir werden später sehen, dass die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv, aber nicht surjektiv ist.

5.22 Definition. Es sei $f: X \rightarrow Y$ bijektiv mit *Graph* $\mathcal{G} = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$. Setze $\mathcal{H} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \mathcal{G}\}$. Dann ist \mathcal{H} ebenfalls Graph einer Abbildung. Sie heißt *Umkehrabbildung* von f , man schreibt f^{-1} . Die Umkehrabbildung ist dadurch bestimmt, dass $f^{-1}(y) = x$ genau dann gilt, wenn $f(x) = y$.

5.23 Beispiel. $f: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, x \mapsto x^2$. Wir haben bereits gesehen, dass f bijektiv ist. Die Umkehrabbildung f^{-1} ist die Wurzelfunktion $f^{-1}: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, x \mapsto \sqrt{x}$.

5.24 Satz. Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ zwei Abbildungen mit $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$. Dann sind f und g bijektiv, und es gelten $g = f^{-1}$ und $f = g^{-1}$.

5.25 Beispiel. Seien $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gegeben durch $f(n) = n + 1$ und

$$g(n) = \begin{cases} n - 1, & n \geq 2, \\ 1, & n = 1. \end{cases}$$

Dann $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$, aber weder f noch g sind bijektiv.

5.3 Dezimaldarstellung

5.26 Bemerkung. Ist $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\{0, 1, \dots, 9\} = Z$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n 10^{-n}$ gegen eine Zahl in $[0, 1]$.

Zum Beispiel ist $\varphi(1, 6, 6, \dots) = \frac{1}{10} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{10^n} = \frac{1}{10} + \frac{6}{100} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{10} + \frac{6}{100} \frac{1}{1 - 1/10} = \frac{1}{10} \left(1 + \frac{6}{9}\right) = \frac{1}{10} \cdot \frac{15}{9} = \frac{1}{6}$.

5.27 Lemma. Ist X die Menge aller Folgen in Z und definiert man

$$\varphi: X \rightarrow [0, 1], \quad (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} c_n 10^{-n},$$

so ist φ surjektiv.

5 Reihen

5.28 *Bemerkung.* Ist $n \in \mathbb{N}$ und $c = (c_1, \dots, c_n, 9, 9, 9, \dots)$ mit $c_n < 9$, so gilt

$$\varphi(c) = \varphi(c_1, \dots, c_{n-1}, 1 + c_n, 0, 0, 0, \dots).$$

5.29 *Satz.* Sei $Y = \{(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X \mid \text{für unendlich viele } n \text{ ist } c_n \neq 9\}$, dann erhält man eine Bijektion

$$\psi: Y \rightarrow [0, 1[, \quad (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \varphi((c_n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

5.4 Absolut konvergente Reihen

5.30 *Beispiel.* $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \pm \dots$ ist konvergent und hat die Summe 0. Die Umordnung

$$\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} - \frac{1}{3} + \dots$$

ist divergent. Man kann zeigen: Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, dann gibt es zu jedem $r \in \mathbb{R}$ eine Permutation σ von \mathbb{N} , so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = r$. Das ist Aufgabe 32.6 aus dem Buch von Kabbalo.

5.31 *Satz (Umordnungssatz).* Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und σ eine Bijektion von \mathbb{N} auf sich. Setze $b_n = a_{\sigma(n)}$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

5.32 *Satz (Cauchy-Produkt).* Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, und sei

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k}.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

5.33 *Satz (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion).* Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

5.34 *Korollar.* Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ und speziell $\exp(x) > 0$.

6 Stetige Funktionen

6.1 Definition. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x_0 \in I$. Dann heißt f *stetig in* x_0 , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt: Ist $x \in I$ und $|x - x_0| < \delta$, dann $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Eine Funktion heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist.

6.2 Bemerkung. Das Zeichen " $\forall x \in X$ " bedeutet "für alle $x \in X$ " und das Zeichen " $\exists y \in Y$ " bedeutet "es gibt ein $y \in Y$ ".

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in I$, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Entsprechend ist f unstetig in x_0 , wenn

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in I: |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon.$$

6.3 Beispiel. (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist stetig.

(b) Konstante Funktionen sind stetig.

(c) Definiere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Dann ist f unstetig in $x_0 = 0$.

6.4 Definition. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $a \in I$ und sei $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir schreiben $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $I \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ die Aussage $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ gilt.

6.5 Satz. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $a \in I$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist stetig in a .

(b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

6.6 Satz. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 . Dann sind auch die folgenden Funktionen stetig in a :

6 Stetige Funktionen

(a) $f + g$ mit $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

(b) $f - g$ und $f \cdot g$, die ebenfalls punktweise definiert sind.

(c) Falls $g(a) \neq 0$, so ist auch f/g stetig in a .

6.7 Definition. Eine Funktion der Form $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, heißt *Polynom*.

Sind p, q zwei Polynome, wobei q nicht das Nullpolynom ist, und ist $D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$, so bezeichnet man die Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

als *gebrochen-rationale Funktion*.

6.8 Bemerkung. Wegen Satz 6.6 sind Polynome und gebrochen-rationale Funktionen stetig auf ihrem Definitionsbereich.

6.9 Satz.

$$\left| \exp(x) - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} \right| \leq 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \quad \text{falls } |x| \leq 1 + \frac{N}{2}.$$

Damit kann man die *Eulersche Zahl* $e = \exp(1)$ so genau ausrechnen, wie man möchte: $e = 2.7182818285 \dots$

6.10 Satz. Die *Exponentialfunktion* ist stetig.

6.11 Satz. Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f: I \rightarrow J$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Ist f stetig in $x_0 \in I$ und g stetig in $f(x_0)$, so ist $g \circ f$ stetig in x_0 .

6.12 Beispiel. Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(-x^2)$, ist stetig. Ihr Graph ist die *Gaußsche Glockenkurve*.

6.13 Definition. Intervalle der Form $[a, b]$ mit reellen Zahlen $a < b$ heißen *kompakt*.

6.14 Theorem (Nullstellensatz von Bolzano). *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, und es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit $f(c) = 0$.*

6.15 Korollar (Zwischenwertsatz). *Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

6.16 Satz. *Sei I ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ ein Intervall.*

Man beachte, dass auch einpunktige Mengen Intervalle sind.

6.17 Satz. Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f auf I ihr Maximum und ihr Minimum an, d. h. es gibt $c, d \in I$, so dass $f(c) = \max\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$ und $f(d) = \min\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$.

6.18 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt, dass $f(x_1) \leq f(x_2)$, dann heißt f *monoton wachsend*. Wenn sogar immer $f(x_1) < f(x_2)$ gilt, dann heißt f *streng monoton wachsend*. Entsprechend erklärt man (streng) monoton fallend.

6.19 Bemerkung. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Wegen Korollar 6.16 ist $f(I) = J$ ein Intervall. Dann ist $f: I \rightarrow J$ bijektiv und besitzt daher eine Umkehrfunktion $f^{-1}: J \rightarrow I$. Die Umkehrfunktion f^{-1} ist streng monoton wachsend. Die analogen Aussagen gelten für streng monoton fallendes f .

6.20 Satz. Die Umkehrfunktion einer auf einem Intervall erklärten stetigen, streng monotonen Funktion ist stetig.

6.21 Beispiel. (a) Ist n eine ungerade natürliche Zahl, so ist die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$, streng monoton wachsend und stetig. Wegen des Zwischenwertsatzes ist sie auch bijektiv. Sie besitzt also eine stetige Umkehrfunktion $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

(b) Ist n eine gerade natürliche Zahl, so ist die Abbildung $f: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, x \mapsto x^n$, streng monoton wachsend und stetig. Sie ist ebenfalls bijektiv. Sie besitzt also eine stetige Umkehrfunktion $f^{-1}: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

6.22 Bezeichnung. Für $h > 0$ gilt

$$\exp(h) = 1 + h + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^n}{n!} > 1 + h, \quad (6.1)$$

also $\exp(x + h) = \exp(x) \exp(h) > \exp(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Daher ist die Exponentialfunktion streng monoton wachsend. Die Abschätzung (6.1) zeigt auch, dass $\exp(\mathbb{R})$ nach oben unbeschränkt ist. Wegen $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ folgt, dass $\exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[$. Die Exponentialfunktion besitzt also eine stetige Inverse, die man als *natürlichen Logarithmus* bezeichnet und als $\log(x)$ schreibt.

7 Die komplexen Zahlen

7.1 Definition. Auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert man eine Addition und eine Multiplikation durch

$$\begin{aligned}(x, y) + (u, v) &= (x + u, y + v) \\ (x, y) \cdot (u, v) &= (xu - yv, xv + yu).\end{aligned}$$

7.2 Satz. *Diese Rechenoperationen erfüllen die Körperaxiome.*

7.3 Bemerkung. (a) Die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 0)$, ist injektiv und mit den Rechenoperationen verträglich. Man versteht daher \mathbb{R} als Teilkörper von \mathbb{R}^2 mit den Operationen aus 7.1 und schreibt für $(x, 0)$ einfach wieder x .

(b) Man setzt $i = (0, 1)$. Dann $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Ferner gilt für $y \in \mathbb{R}$, dass $iy = (0, 1) \cdot (y, 0) = (0, y)$. Also $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$. Wir werden in Zukunft die Schreibweise $x + iy$ benutzen. Dann lauten die Rechenregeln

$$\begin{aligned}(x + iy) + (u + iv) &= (x + u) + (y + v)i, \\ (x + iy)(u + iv) &= (xu - yv) + (xv + uy)i.\end{aligned}$$

7.4 Bezeichnung. Man bezeichnet \mathbb{R}^2 , versehen mit diesen Rechenregeln, als den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen. Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ bezeichnet man x als *Realteil* und y als *Imaginärteil* von z . Man schreibt $x = \operatorname{Re}(z)$ und $y = \operatorname{Im}(z)$.

7.5 Definition. Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so heißt $\bar{z} = x - iy$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl*.

7.6 Beispiel. (a) $\bar{i} = -i$.

(b)

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

(c) $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$, also

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^8 = 1.$$

(d) $(1+\sqrt{3}i)^2 = -2+2\sqrt{3}i$, also $(1+\sqrt{3}i)^3 = 2(-1+\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i) = 2(-1-3) = -8$.

Also

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 1.$$

7.7 Satz. Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten

(a) $\overline{\overline{z}} = z$,

(b) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$,

(c) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,

(d) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$,

(e) $z\overline{z} \in \mathbb{R}$ mit $z\overline{z} \geq 0$.

7.8 Definition. Der *Absolutbetrag* von $z \in \mathbb{C}$ ist definiert als

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

wobei $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$.

Für reelles x stimmt diese Definition von $|x|$ mit der aus 2.12 überein.

7.9 Satz. Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten

(a) $|zw| = |z||w|$,

(b) $|\overline{z}| = |z|$.

(c) (*Dreiecksungleichung*) $|z+w| \leq |z| + |w|$.

(d) $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

Daher bezeichnet man $|z - w|$ als den Abstand der komplexen Zahlen z und w . Wer einen Abstandsbegriff hat, der hat auch einen Konvergenzbegriff.

7.10 Definition. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{C} , und es sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen z_0 , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|z_n - z_0| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Man schreibt in diesem Fall $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$.

7.11 Satz. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{C} . Die Folge ist genau dann konvergent, wenn die reellen Folgen $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren. In diesem Fall gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) + i \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n).$$

Daraus sieht man, dass die Rechenregeln 4.14 auch für komplexe Folgen gelten.

7 Die komplexen Zahlen

7.12 Satz (Cauchy-Kriterium). Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{C} . Dann sind äquivalent:

- (a) Die Folge konvergiert.
- (b) Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt $|z_n - z_m| < \epsilon$.

7.13 Definition. Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{C} , und es sei $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$ die n -te Partialsumme. Man sagt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. In diesem Fall ist $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ der Reihenwert.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_j$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ konvergiert.

7.14 Satz. Majorantenkriterium, Quotientenkriterium, Umordnungssatz und der Satz über das Cauchy-Produkt gelten auch für komplexe Reihen.

7.15 Definition. Die komplexe Exponentialfunktion ist durch dieselbe Reihe definiert wie die reelle:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Die Abschätzung aus Satz 6.9 gilt auch über den komplexen Zahlen.

Der Körper \mathbb{C} ist nicht angeordnet. Beweise, welche die Monotonie verwenden, übertragen sich daher nicht. Beispielsweise werden wir sehen, dass die komplexe Exponentialfunktion nicht injektiv ist.

7.16 Definition. Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

- (a) f heißt stetig in $z_0 \in D$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Ferner heißt f stetig, wenn f in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist.
- (b) Es gilt $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$, wenn für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{z_0\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$.

7.17 Satz. Es sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ und es sei $z_0 \in D$. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist stetig in z_0 .
- (b) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

7.18 Satz. Die Rechenregeln für stetige Funktionen (Sätze 6.6 und 6.11) gelten auch für komplexe Funktionen. Insbesondere sind Polynome stetig auf ganz \mathbb{C} und gebrochen rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.

Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig.

8 Elementare Funktionen

8.1 Definition. (a) Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R} . Wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, wenn es zu jedem $C \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n > C$ für alle $n \geq N$. Wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, wenn es zu jedem $C \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n < C$ für alle $n \geq N$.

(b) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt, und es sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Für $a \in \mathbb{R}$ oder $a = \pm\infty$ schreiben wir $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ gilt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$. Analog für $-\infty$.

Achtung: Es gibt unbeschränkte Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, für die weder $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ noch $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ gilt.

8.1 Exponentialfunktion

8.2 Satz (Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion). (a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x) > 0$.

(b) $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend.

(c) $\exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[$.

(d) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^m} = \infty$$

8.3 Satz (Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion). (a) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$.

(b) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $\exp(z) \neq 0$ und

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}.$$

(c) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$.

(d) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $|\exp(ix)| = 1$.

8.2 Der Logarithmus

Den natürlichen Logarithmus hatten wir in 6.22 definiert und mit \log abgekürzt.

8.4 Satz. (a) *Der natürliche Logarithmus ist stetig und streng monoton wachsend.*

(b) *Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\log(\exp(x)) = x$, für $x > 0$ ist $\exp(\log(x)) = x$.*

(c) $\log(]0, \infty[) = \mathbb{R}$.

(d) *Für $x, y > 0$ ist $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.*

(e) $\log(1) = 0$, $\log(e) = 1$.

(f) *Für $x > 0$ ist $\log(1/x) = -\log(x)$.*

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x) = \infty$ und $\lim_{x \searrow 0} \log(x) = -\infty$.

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$.

8.3 Die allgemeine Potenzfunktion

8.5 Definition. Für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ definieren wir $a^z = \exp(z \log a)$.

8.6 Bemerkung. (a) Man überlegt sich leicht, dass diese Definition mit den bereits bestehenden Spezialfällen a^n , a^{-1} und $a^{1/n}$ kompatibel ist.

(b) Es gilt speziell $e^z = \exp(z)$.

8.7 Satz. (a) *Für $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $(a^x)^y = a^{xy}$.*

(b) *Für $a > 0$ und $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $a^{z+w} = a^z a^w$.*

(c) *Für $a, b > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt $(ab)^z = a^z b^z$.*

(d) *Für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt $(\frac{1}{a})^z = a^{-z}$.*

8.4 Trigonometrische Funktionen

8.8 Definition. Für $z \in \mathbb{C}$ bezeichnet $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ den *Sinus* von z und $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ den *Cosinus* von z .

8.9 Satz. (a) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten $\cos(x) = \operatorname{Re}(\exp(ix))$ und $\sin(x) = \operatorname{Im}(\exp(ix))$.*

(b) *Sinus und Cosinus sind stetig.*

(c) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$ (Eulersche Formel).

(d) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten $\cos(-z) = \cos(z)$ und $\sin(-z) = -\sin(z)$.

(e) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt der trigonometrische Pythagoras:

$$\sin(z)^2 + \cos(z)^2 = 1.$$

8.10 Satz. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

8.11 Satz (Additionstheoreme). Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten

$$\begin{aligned} \sin(z+w) &= \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w) \\ \cos(z+w) &= \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w). \end{aligned}$$

Speziell gelten $\sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z)$ und $\cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2 = 2 \cos(z)^2 - 1$.

8.12 Lemma. Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cos w - \cos z = -2 \sin\left(\frac{w-z}{2}\right) \sin\left(\frac{z+w}{2}\right).$$

8.13 Beispiel. Für $0 \leq x \leq \sqrt{12}$ erhalten wir aus dem Konvergenzkriterium von Leibniz

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Speziell gilt $\cos(2) \leq 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass der Cosinus im Intervall $]0, 2[$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Das folgende Lemma zeigt die Eindeutigkeit dieser Nullstelle.

8.14 Lemma. Die Cosinusfunktion ist auf dem Intervall $[0, 2]$ streng monoton fallend.

8.15 Definition. Die Kreiszahl π ist dadurch definiert, dass $\frac{\pi}{2}$ die Nullstelle des Cosinus im Intervall $]0, 2[$ ist.

8.16 Satz. (a) $\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$.

(b) $e^{i\pi} = -1$.

(c) $e^{2\pi i} = 1$.

8.17 Satz. (a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z$ und $\cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin z$.

8 Elementare Funktionen

- (b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten $\sin(z + \pi) = -\sin z$ und $\cos(z + \pi) = -\cos z$.
- (c) Sinus und Cosinus sind periodisch mit Periode 2π . Das bedeutet, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ die Aussagen $\sin(z + 2\pi) = \sin z$ und $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ gelten.
- (d) $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 0\} = \{(k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- (e) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

8.18 Bemerkung. Wir kennen nun unter anderem die folgenden speziellen Werte der trigonometrischen Funktionen

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	0
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1

8.19 Definition. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definiert man

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definiert man

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

8.5 Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

8.20 Satz. (a) Die Funktion \cos ist auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend und bildet es bijektiv auf $[-1, 1]$ ab. Ihre Umkehrfunktion ist

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

(b) Die Funktion \sin ist auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend und bildet es bijektiv auf $[-1, 1]$ ab. Ihre Umkehrfunktion ist

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(c) Die Funktion \tan ist auf dem Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ streng monoton wachsend und bildet es bijektiv auf \mathbb{R} ab. Ihre Umkehrfunktion ist

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

8.6 Polarkoordinaten

8.21 *Bemerkung.* (a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$. Man sagt: "exp hat die Periode $2\pi i$."

(b) Ist $x \in \mathbb{R}$, so gilt $\exp(ix) = 1$ genau dann, wenn $x = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

8.22 **Lemma** (Polarkoordinaten). *Ist $z \in \mathbb{C}$, so existieren $\varphi \in]-\pi, \pi]$ und $r \geq 0$ mit*

$$z = re^{i\varphi}.$$

8.23 *Bemerkung.* (a) Für $z \neq 0$ werden die Polarkoordinaten wie folgt bestimmt

$$r = |z|, \quad \varphi(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right), & \text{falls } \operatorname{Re} z > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } \operatorname{Re} z = 0 \text{ und } \operatorname{Im} z > 0, \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) + \pi, & \text{falls } \operatorname{Re} z < 0 \text{ und } \operatorname{Im} z \geq 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{falls } \operatorname{Re} z = 0 \text{ und } \operatorname{Im} z < 0, \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) - \pi, & \text{falls } \operatorname{Re} z < 0 \text{ und } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

(b) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

8.7 Landau-Symbole

Die Landau-Symbole bezeichnen *keine* Funktionen.

8.24 **Definition.** Man schreibt

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a,$$

falls

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

und

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \rightarrow a,$$

falls $\frac{f}{g}$ in einer Umgebung von a nach oben beschränkt ist. Unter einer Umgebung verstehen wir ein Intervall der Form $]a - \epsilon, a + \epsilon[$, wenn $a \in \mathbb{R}$, der Form $] \frac{1}{\epsilon}, \infty[$, wenn $a = \infty$, bzw. der Form $] -\infty, -\frac{1}{\epsilon}$, wenn $a = -\infty$, wobei in allen Fällen $\epsilon > 0$.

8.25 *Beispiel.* (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $x^n = o(\exp(x))$, $x \rightarrow \infty$.

(b) $|\log x| = o\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \rightarrow 0$.

(c) $|\cos x| = O(1)$, $x \rightarrow \infty$.

8.26 *Beispiel.*

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x = O\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{x} = O\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

9 Differenzierbarkeit

9.1 Definition. $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *offen*, wenn D Vereinigung von offenen Intervallen ist.

9.2 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x_0 \in D$. Falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

existiert (in \mathbb{R}), dann sagt man, f sei in x_0 *differenzierbar*. In diesem Fall bezeichnet man $f'(x_0)$ als *Ableitung* von f in x_0 . Ist f in jedem Punkt von D differenzierbar, so heißt f differenzierbar in D .

Falls der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert, so bezeichnet man ihn als *rechtsseitige Ableitung*. Analog definiert man die linksseitige Ableitung.

Bemerkung. Je nach Kontext schreibt man auch $\frac{df}{dx}$ oder \dot{f} für die Ableitung.

9.3 Satz. Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann ist f genau dann differenzierbar in x_0 , wenn es eine in x_0 stetige Funktion $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$$

für alle $x \in D$. In diesem Fall gilt $\varphi(x_0) = f'(x_0)$.

9.4 Satz. Wenn f in x_0 differenzierbar ist, dann ist f in x_0 stetig.

9.5 Lemma. Eine Funktion f ist genau dann differenzierbar in x_0 , wenn die rechts- und die linksseitige Ableitung in x_0 existieren und übereinstimmen.

9.6 Beispiel. (a) Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die konstante Funktion $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar mit $f' = 0$.

(b) Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar mit $f' = 1$.

(c) $\exp' = \exp$.

(d) $\cos' = -\sin$.

(e) Die Formel $\sin' = \cos$ zeigen wir in Beispiel 9.10.

9.7 Satz (Rechenregeln). Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

(a) $f + g$ ist differenzierbar mit $(f + g)' = f' + g'$.

(b) (Produktregel) fg ist differenzierbar mit $(fg)' = f'g + g'f$.

(c) Ist $c \in \mathbb{R}$, so ist cf differenzierbar mit $(cf)' = cf'$.

(d) Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

9.8 Korollar. Polynome sind differenzierbar. Genauer gilt für $p(x) = \sum_{n=0}^m a_n x^n$, dass $p'(x) = \sum_{n=1}^m a_n n x^{n-1}$. Gebrochen rationale Funktionen sind überall dort differenzierbar, wo sie definiert sind.

9.9 Satz (Kettenregel). Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f: D \rightarrow E$ und $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Ist f differenzierbar in $x_0 \in D$ und g differenzierbar in $f(x_0)$, dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x_0 , und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

9.10 Beispiel. (a) $\sin' = \cos$, denn $\sin x = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$. Daher $\sin' x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$.

(b) $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

9.11 Satz. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Sei $x_0 \in D$, sei f in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Sei g die Umkehrfunktion von f . Dann ist g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

9.12 Beispiel. (a) $\log'(y) = \frac{1}{y}$.

(b) Die Ableitung von $\sqrt[3]{y}$ ist $\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$, denn $\sqrt[3]{y}$ ist die Umkehrfunktion von $f: x \mapsto x^3$. Man beachte, dass die Voraussetzungen des Satzes in $x = 0$ nicht erfüllt sind.

9.13 Satz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

9.14 Beispiel. (a) $\arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2}$.

9 Differenzierbarkeit

$$(b) \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \text{ für } -1 < y < 1.$$

Beweis. Setze $f(x) = \sin(x)$ und $g(y) = \arcsin(y)$. Für $y \in]-1, 1[$ gelten $\arcsin(y) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und $\cos(\arcsin(y)) > 0$.

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \quad \square$$

9.15 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. Ist f differenzierbar in D und f' differenzierbar in $x_0 \in D$, so heißt f *zweimal differenzierbar* in x_0 . Man schreibt dann $f''(x_0)$. Analog definiert man f''' . Wenn das nicht reicht, geht man zu folgender Notation über:

$$f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', \dots, f^{(n+1)} = (f^{(n)})', \dots$$

9.16 Beispiel. Für fest gewähltes $\alpha \in \mathbb{R}$ definiere $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \log(x))$. Dann

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \quad f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}.$$

10 Der Mittelwertsatz

10.1 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x_0 \in D$. Wir sagen, dass f in x_0 ein (*globales*) *Maximum* hat, wenn f keinen größeren Funktionswert als $f(x_0)$ annimmt. In diesem Fall bezeichnet man x_0 als *Maximalstelle*. Analog definiert man Minima und Minimalstellen.

Beispiel. Der Cosinus hat in jedem Punkt der Form $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, eine Maximalstelle. Das Maximum ist 1.

10.2 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, und sei $x_0 \in D$. Wir sagen, dass f in x_0 ein *lokales Maximum* hat, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\text{ist } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \epsilon, \text{ so ist } f(x) \leq f(x_0).$$

In diesem Fall bezeichnet man x_0 als *lokale Maximalstelle*. Wenn sogar gilt:

$$\text{ist } x \in D \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \epsilon, \text{ so ist } f(x) < f(x_0),$$

dann ist x_0 eine *strikte* lokale Maximalstelle. Analoge Definitionen gelten für Minima und Extrema.

10.3 Satz. Sei $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in]a, b[$ eine lokale Extremalstelle von f . Falls f in x_0 differenzierbar ist, so gilt $f'(x_0) = 0$.

10.4 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Falls $f'(x_0) = 0$, so heißt x_0 *kritische Stelle* von f .

Beispiel. Die Umkehrung von Satz 10.3 gilt nicht. Beispielsweise besitzt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, in $x_0 = 0$ eine kritische Stelle.

10.5 Satz (Satz von Rolle). Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $]a, b[$ differenzierbar ist. Falls $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $x \in]a, b[$ mit $f'(x) = 0$.

10.6 Theorem (Mittelwertsatz). Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $]a, b[$ differenzierbar ist. Dann gibt es ein $x \in]a, b[$ mit

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

10.7 Satz. Sei $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$. Dann ist f konstant.

10 Der Mittelwertsatz

10.8 Satz. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann gilt:

(a) Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f streng monoton wachsend.

(b) f ist genau dann monoton wachsend, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[$.

Beispiel. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$, ist streng monoton wachsend. Trotzdem besitzt f' eine Nullstelle im Ursprung.

10.9 Satz. Sei $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und sei $x_0 \in]a, b[$ ein kritischer Punkt von f . Falls $f''(x_0) > 0$, so besitzt f in x_0 ein striktes lokales Minimum. Falls $f''(x_0) < 0$, so besitzt f in x_0 ein striktes lokales Maximum.

Beispiel. (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \cos(x)$. Dann $f'(x) = \cos(x) - x \sin(x)$. Wegen $f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\frac{1}{2}\sqrt{2} > 0$ und $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$ besitzt f' in $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ eine Nullstelle x_0 . Dort gilt

$$f''(x_0) = -2 \sin(x_0) - x_0 \cos(x_0) < 0$$

Also besitzt f in x_0 ein striktes lokales Maximum.

(b) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^4$, besitzt in $x_0 = 0$ ein striktes lokales Minimum (welches sogar global ist). Es gilt aber $f''(0) = 0$. Daher liefert Satz 10.9 kein notwendiges Kriterium.

(c) Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auf Blatt 9 wird gezeigt werden, dass f in ganz \mathbb{R} differenzierbar ist mit $f'(0) = \frac{1}{2}$ und dass f' unstetig im Ursprung ist. Ich zeige hier, dass es keine Umgebung von 0 gibt, in der f monoton wächst.

Wir nehmen als Widerspruchsannahme an, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass f in $]0, \epsilon[$ monoton wächst. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\frac{1}{2k\pi} < \epsilon$. Wegen $\frac{\pi}{2} < 2$ kann k so groß gewählt werden, dass $4k(4 - \pi) - \pi > 0$. Setze

$$x_1 = \frac{1}{(2k + \frac{1}{2})\pi} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{2k\pi}.$$

Dann $x_1 < x_2$ und

$$f(x_1) = \frac{1}{(4k + 1)\pi} + \frac{1}{(2k + \frac{1}{2})^2 \pi^2}, \quad f(x_2) = \frac{1}{4k\pi}.$$

Es gilt

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{(4k + 1)\pi} + \frac{4}{(4k + 1)^2 \pi^2} - \frac{1}{4k\pi} = \frac{4k\pi(4k + 1) + 16k - \pi(4k + 1)^2}{4k(4k + 1)^2 \pi^2}.$$

Wir berechnen den Zähler

$$16k^2\pi + 4k\pi + 16k - 16k^2\pi - 8k\pi - \pi = 4k(4 - \pi) - \pi > 0.$$

Also $f(x_1) > f(x_2)$. Damit ist gezeigt, dass f auf $]0, \epsilon[$ nicht monoton wächst. Dem Graphen in Abbildung 10.1 kann man das nicht ansehen.

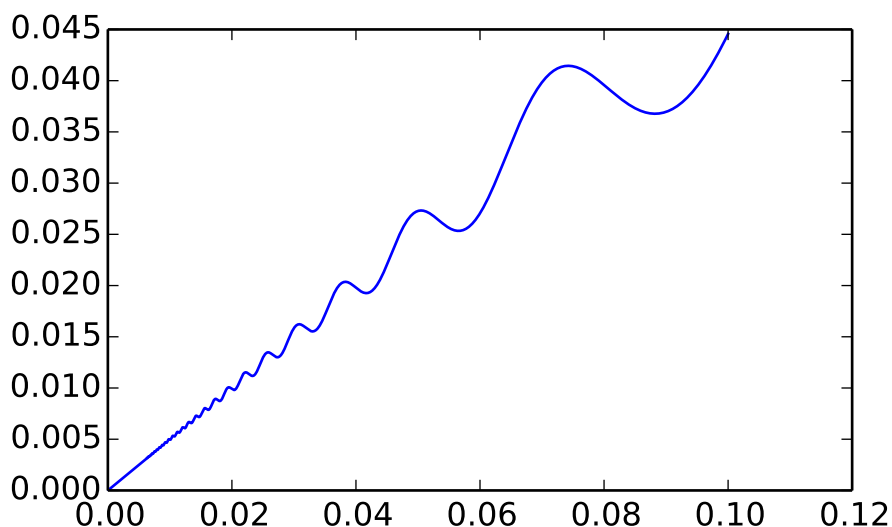


Abbildung 10.1: Graph der Funktion aus Beispiel 10.9(c)

10.10 Satz (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann existiert $x \in]a, b[$ mit

$$(f(b) - f(a))g'(x) = (g(b) - g(a))f'(x).$$

10.11 Satz (1. Regel von de l'Hôpital). Die Funktionen f und g seien differenzierbar auf dem Intervall $]a, b[$, es sei $g'(x) \neq 0$ für alle x , und es gelte $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = 0 = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} g(x)$.

Falls $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$, und beide Grenzwerte stimmen überein.

10.12 Satz (2. Regel von de l'Hôpital). Die Funktionen f und g seien differenzierbar auf dem Intervall $]a, b[$, es sei $g'(x) \neq 0$ für alle x , und es gelte $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} g(x) = \infty$.

Falls $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$, und beide Grenzwerte stimmen überein.

10.13 Bemerkung. Die Varianten der ersten und zweiten Regel von de l'Hôpital für $x \nearrow b$ und $x \rightarrow \pm\infty$ gelten ebenfalls. Die Regeln gelten außerdem für den Fall $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$.

10 Der Mittelwertsatz

10.14 *Beispiel.* (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x) - x + 1}{(x-1) \log x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\log(x) + \frac{x-1}{x}} =$
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}.$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\pi - 2 \arctan x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = 2.$

Dieses Beispiel verschärft die Aussage von Beispiel 8.26.

10.15 Definition. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für jede Wahl von $c, x, d \in I$ mit $c < x < d$ gilt

$$f(x) \leq f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - c).$$

f heißt *konkav*, wenn $-f$ konvex ist.

10.16 *Beispiel.* Die Betragsfunktion ist konvex.

10.17 Definition. $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *konvex*, wenn zu je zwei Punkten $P, Q \in M$ die Verbindungsstrecke von P und Q in M liegt.

10.18 *Bemerkung.* $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn $\{(x, y) \mid x \in I, y \geq f(x)\}$ konvex ist.

10.19 Satz. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und auf $]a, b[$ zweimal differenzierbar. Dann sind äquivalent

- (a) f ist konvex,
- (b) f' ist monoton wachsend,
- (c) $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[$.

11 Integralrechnung

11.1 Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls es $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ gibt mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, so dass f auf den Intervallen $]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1, \dots, n$, konstant ist, so heißt f *Treppenfunktion*. Mit $\mathcal{T}[a, b]$ bezeichnen wir die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$.

11.2 Bemerkung. Sind $f, g \in \mathcal{T}[a, b]$ und $c \in \mathbb{R}$, so sind auch cf und $f + g$ in $\mathcal{T}[a, b]$. Daher ist $\mathcal{T}[a, b]$ ein Untervektorraum des \mathbb{R} -Vektorraums aller Abbildungen von $[a, b]$ nach \mathbb{R} .

11.3 Definition. Ist $f \in \mathcal{T}[a, b]$, ist $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und f konstant auf $]x_{k-1}, x_k[$ mit dem Wert c_k , so definiert man

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

11.4 Bemerkung. (a) Sind $f, g \in \mathcal{T}[a, b]$ und $c \in \mathbb{R}$, so gelten

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Daher ist

$$\mathcal{T}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_a^b f(x) dx,$$

eine \mathbb{R} -lineare Abbildung.

(b) Sind $f, g \in \mathcal{T}[a, b]$ mit $f \leq g$, also $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

11.5 Definition. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann definieren wir *Ober-* und *Untegral* von f wie folgt:

$$\int_a^b f(x) dx = \inf \left\{ \int_a^b \psi(x) dx \mid \psi \in \mathcal{T}[a, b], \psi \geq f \right\},$$
$$\int_a^b f(x) dx = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx \mid \varphi \in \mathcal{T}[a, b], \varphi \leq f \right\}.$$

11 Integralrechnung

11.6 Definition. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Sie heißt *Riemann-integrierbar*, wenn $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$. Den gemeinsamen Wert bezeichnet man mit $\int_a^b f(x) dx$ und nennt ihn das (*bestimmte*) *Integral* von f über $[a, b]$.

11.7 Satz (Riemann-Kriterium). Für eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sind gleichwertig:

(a) f ist Riemann-integrierbar.

(b) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$, so dass $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx < \epsilon.$$

(c) Es gibt Folgen $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{T}[a, b]$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x)) dx = 0.$$

Für je zwei Folgen $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in (c) gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx$.

11.8 Beispiel. Mit vollständiger Induktion zeigt man

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

Damit zeigt man, dass die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, Riemann-integrierbar ist, indem man das Riemann-Kriterium überprüft. Es gilt $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

11.9 Satz. Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, und es sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gelten

(a) cf ist Riemann-integrierbar mit $\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$.

(b) $f + g$ ist Riemann-integrierbar mit $\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

11.10 Bezeichnung. Für eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir Funktionen $f_+, f_-: D \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) \leq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gelten $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

11.11 Satz. Für Riemann-integrierbare Funktionen $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gelten:

(a) f_+ und f_- sind Riemann-integrierbar.

(b) $|f|$ ist Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq M(b-a),$$

wenn $M = \sup\{|f(x)| \mid a \leq x \leq b\}$.

(c) $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ sind Riemann-integrierbar.

11.12 Satz. Für Riemann-integrierbare Funktionen $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gelten:

(a) f^2 ist Riemann-integrierbar.

(b) $f \cdot g$ ist Riemann-integrierbar.

Satz 11.12 macht keine Aussage über den Wert des Integrals.

11.13 Bezeichnung. Es sei $f: D \rightarrow W$ eine Abbildung. Es sei $E \subseteq D$. Die *Einschränkung* von f auf E ist diejenige Abbildung auf E , welche dieselbe Abbildungsvorschrift wie f besitzt. In Zeichen:

$$f|_E: E \rightarrow W, \quad x \mapsto f(x).$$

11.14 Satz. Es seien $a < b < c$. Eine Funktion $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ beide Riemann-integrierbar sind. In diesem Fall gilt

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

11.15 Bezeichnung. Man setzt $\int_a^a f(x) dx = 0$ und für $a < b$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

11.16 Satz. Jede monotone Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

11.17 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sie heißt *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

11.18 Beispiel. $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$, ist nicht gleichmäßig stetig.

11.19 Satz. Jede auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

11.20 Satz. Jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

11 Integralrechnung

11.21 Satz. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und sei $c \in I$. Definiert man

$$F: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_c^x f(t) dt,$$

so ist F differenzierbar mit $F' = f$.

11.22 Definition. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Eine differenzierbare Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* oder *unbestimmtes Integral* von f , wenn $F' = f$.

11.23 Bemerkung. (a) Ist F eine Stammfunktion zu f , so schreibt man $F(x) = \int f(x) dx$.

(b) Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich lediglich durch eine Konstante.

11.24 Theorem (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei F eine Stammfunktion von f . Dann gilt für alle $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Bezeichnung. Schreibweise

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

11.25 Beispiel. (a) $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ ist eine Stammfunktion für $f(x) = x^2$. Also

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(b) $F(x) = \log|x|$ ist eine Stammfunktion für $f(x) = \frac{1}{x}$. Also

$$\int_{-e^2}^{-e} \frac{1}{x} dx = \log|x| \Big|_{-e^2}^{-e} = \log(e) - \log(e^2) = -1.$$

11.26 Satz (Partielle Integration). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, seien $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und f', g' stetig. Dann

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

11.27 Beispiel. (a) $\int xe^x dx = e^x(x - 1)$.

(b) $\int \log(x) dx = x \log(x) - x$.

11.28 Satz (Substitutionsregel). Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $\varphi: J \rightarrow I$ differenzierbar mit stetiger Ableitung. Dann gilt für $a, b \in J$

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

11.29 Beispiel. (a)

$$\int_a^b f(2t) dt = \frac{1}{2} \int_{2a}^{2b} f(x) dx.$$

(b) (Logarithmisches Integral) Ist $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung, so gilt

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \log |\varphi(x)|.$$

(c) $\int \tan x dx = -\log |\cos x|.$

11.30 Satz (Partialbruchzerlegung). *Es seien P und Q komplexe Polynome. Das Polynom Q besitze eine Zerlegung in Linearfaktoren der Form $Q(z) = \alpha \prod_{j=1}^r (z - z_j)^{m_j}$ mit $\alpha, z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$ und $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein komplexes Polynom T und Zahlen $c_{j,k} \in \mathbb{C}$, so dass*

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = T(z) + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{j,k}}{(z - z_j)^k}.$$

Das Polynom T und die Zahlen $c_{j,k}$ sind eindeutig bestimmt.

11.31 Bemerkung. (a) Wenn Q ein reelles Polynom ist, dann gibt es zu jedem $z_j \notin \mathbb{R}$ ein z_m mit $z_m = \bar{z}_j$. Wenn dann auch noch P reell ist, dann $c_{m,k} = \overline{c_{j,k}}$. Man fasst dann wie folgt zusammen

$$\frac{c_{j,k}}{(z - z_j)^k} + \frac{\overline{c_{j,k}}}{(z - \bar{z}_j)^k}.$$

Das ist eine reelle Funktion.

(b) In der Praxis bestimmt man T durch Division mit Rest und anschließend die $c_{j,k}$ durch Koeffizientenvergleich.

(c) Auf diese Weise sind alle rationalen Funktionen integrierbar. Details findet man in § 28 des Buchs von Kabbalo.

11.32 Beispiel. Bestimme die Stammfunktion von $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = 1 + \frac{x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$. Zerlege $Q(z) = z^3 - 2z^2 + z$ in Linearfaktoren. $Q(z) = z(z - 1)^2$. Ansatz

$$\begin{aligned} \frac{z^2 + 1}{z^3 - 2z^2 + z} &= \frac{a}{z} + \frac{b}{z - 1} + \frac{c}{(z - 1)^2} \\ &= \frac{a(z - 1)^2 + bz(z - 1) + cz}{z(z - 1)^2} \\ &= \frac{z^2(a + b) + z(-2a - b + c) + a}{z(z - 1)^2}. \end{aligned}$$

11 Integralrechnung

Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ -2a - b + c &= 0 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Die Lösung ist $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$. Also

$$\frac{z^2 + 1}{z^3 - 2z^2 + z} = \frac{1}{z} + \frac{2}{(z-1)^2}.$$

Wir integrieren einzeln:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x|$$

Beim zweiten Integral substituieren wir $t = x - 1$.

$$\int \frac{2}{(x-1)^2} dx = \int 2t^{-2} dt = -2t^{-1} = -\frac{2}{x-1}.$$

Also

$$\int \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = x + \log |x| - \frac{2}{x-1}.$$

11.33 Bemerkung. Aus Kapitel 8 erhalten wir Tabelle 11.1 von Grundintegralen.

$f(x)$	$\int f(x) dx$	
$x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$x \in \mathbb{R}$
$x^{-n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1}$	$x \neq 0$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x > 0$
$\frac{1}{x}$	$\log x $	$x \neq 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$ x < 1$

Tabelle 11.1: Tabelle von Grundintegralen

11.34 *Beispiel.* Der Flächeninhalt des Einheitskreises beträgt π .

Beweis. Der Flächeninhalt des Einheitskreises ist gleich $2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$. Wir substituieren $x = \sin(t)$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt.$$

Nun integrieren wir partiell

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos(t) dt &= \cos(t) \sin(t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin(t)) \sin(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man nach $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt$ auflösen und erhält $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \frac{\pi}{2}$. \square

12 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

12.1 Definition. Es sei D Menge. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Funktion $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in D$, so sagt man, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *punktweise* gegen f konvergiert.

12.2 Definition. Es sei D eine Menge und es seien $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert *gleichmäßig* gegen f , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $x \in D$ und alle $n \geq N$ gilt, dass $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Diese beiden Definitionen gelten genauso, wenn man \mathbb{R} durch \mathbb{C} ersetzt.

12.3 Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Dann konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise. Obwohl alle f_n stetig sind, ist die Grenzfunktion unstetig.

12.4 Satz. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist die Grenzfunktion stetig.

Gilt auch für komplexes D und/oder komplexe Zielmenge.

12.5 Satz. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen f . Dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Bemerkung. Aufgabe 3 von Blatt 10 zeigt, dass die Aussage von Satz 12.5 nicht mehr gilt, wenn gleichmäßige Konvergenz durch punktweise Konvergenz ersetzt wird.

12.6 Satz. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'_n:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere punktweise gegen die Funktion $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ und die Folge $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei gleichmäßig konvergent. Dann ist f differenzierbar und

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad \text{für alle } x \in]a, b[.$$

12.7 Beispiel. Definiere $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{n} \sin(nx)$. Dann konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Es gilt $f'_n(x) = \cos(nx)$. Diese Folge konvergiert noch nicht einmal punktweise, wie man durch Einsetzen von $x = \pi$ sieht.

12.8 Definition. Sei D eine Menge. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei f_k eine in D definierte Funktion. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ die Partialsumme. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ heißt gleichmäßig konvergent, wenn die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.

12.9 Korollar. *Eine gleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen hat eine stetige Summe.*

12.10 Satz. *Sei D eine Menge. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gebe es ein $\alpha_k \geq 0$, so dass $|f_k(x)| \leq \alpha_k$ für alle $x \in D$. Falls $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ konvergiert, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent.*

12.11 Beispiel. Die Exponentialreihe und die Reihen von \sin und \cos konvergieren gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall.

13 Potenzreihen

13.1 Definition. Unter einer *komplexen Potenzreihe* verstehen wir eine Funktion der Form

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n,$$

wobei a, c_0, c_1, \dots feste komplexe Zahlen sind. Der Definitionsbereich dieser Funktion ist die Menge aller komplexen z , für die die Reihe konvergiert.

13.2 Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}_0$ wird eine Funktion $J_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!2^{2j+n}} z^{2j+n}.$$

Diese Funktion ist die *Besselfunktion* zur Ordnung n .

13.3 Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $r \geq 0$ sei

$$B_r(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\} \quad \text{und} \quad \bar{B}_r(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}.$$

Ferner sei $B_\infty(a) = \mathbb{C}$ und $\bar{B}_\infty(a) = \mathbb{C}$.

13.4 Satz. Sei $a \in \mathbb{C}$ und sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in \mathbb{C} . Sei $z_1 \in \mathbb{C}$ so, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - a)^n$ konvergiert. Ist $0 \leq \rho < |z_1 - a|$, so konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ absolut und gleichmäßig auf $\bar{B}_\rho(a)$.

13.5 Definition. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ eine Potenzreihe. Dann definiert man ihren *Konvergenzradius* als

$$r = \sup \left\{ |z - a| \mid \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \text{ ist konvergent} \right\}.$$

Dabei sind $r = 0$ und $r = \infty$ zugelassen. Wegen des Satzes 13.4 ist $r = \infty$ gleichbedeutend damit, dass die Potenzreihe auf ganz \mathbb{C} konvergiert.

Beispiel. Der Konvergenzradius der Besselfunktion J_n ist ∞ . Eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$ ist nämlich die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$, die gegen $\exp\left(\frac{x^2}{4}\right)$ konvergiert.

13.6 Satz. Sei r der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$. Dann gelten:

- (a) Die Potenzreihe konvergiert absolut auf $B_r(a)$.
- (b) Ist $0 < \rho < r$, so konvergiert sie gleichmäßig auf $\overline{B}_\rho(a)$.
- (c) Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(a)$ divergiert die Potenzreihe.

13.7 Korollar. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r . Sie definiert auf $B_r(a)$ eine stetige Funktion.

13.8 Satz. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe. Ist $c_n \neq 0$ für fast alle n und existiert $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$, so ist r der Konvergenzradius der Potenzreihe.

13.9 Beispiel. (a) Die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius ∞ .

(b) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$. Sie hat daher den Konvergenzradius 1.

(c) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$ hat den Konvergenzradius 0.

13.10 Definition. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine nach oben beschränkte, reelle Folge. Für $N \in \mathbb{N}$ setze $b_N = \sup\{a_n \mid n \geq N\}$. Die Folge $(b_N)_{N \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend und beschränkt, besitzt also einen Grenzwert ℓ . Man bezeichnet ℓ als den *Limes superior* von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, i. Z.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq N} a_n.$$

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach unten beschränkt, so bezeichnet man

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{n \geq N} a_n$$

als ihren *Limes inferior*. Der Limes superior einer nach oben unbeschränkten Folge ist ∞ , der Limes inferior einer nach unten unbeschränkten Folge ist $-\infty$.

13.11 Bemerkung. (a) Wenn $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, dann stimmen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ überein.

(b) Wenn $a_n = (-1)^n b_n$ für eine konvergente Folge (b_n) mit $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n > 0$, dann $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -b$.

13.12 Satz (Hadamard). Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r . Dann

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

13.13 Beispiel. (a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha(z-a)^n$ hat den Konvergenzradius 1.

(b) Die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ hat bekanntlich den Konvergenzradius ∞ . Also $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. Das folgt ebenfalls aus Aufgabe 4 von Blatt 3.

13 Potenzreihen

(c) Betrachte

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^{4n}.$$

Dann

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4n]{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4} + \frac{1}{4n}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}.$$

Der Konvergenzradius beträgt $\sqrt[4]{2}$.

13.14 Definition. Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ heißt *reell*, wenn a sowie alle c_n reell sind.

13.15 Satz. Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$.

(a) Auf $]a-r, a+r[$ ist die Funktion f beliebig oft differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} \quad \text{falls } a-r < x < a+r.$$

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

13.16 Beispiel. Die Besselfunktion J_n erfüllt die Differentialgleichung

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

14 Integrale rationaler Funktionen

In diesem Abschnitt liefere ich eine ausführlichere Untersuchung von Integralen rationaler Funktionen nach.

Wir integrieren eine rationale Funktion $\frac{P}{Q}$ mit reellen Polynomen P und Q . Wir gehen davon aus, dass der Zählergrad echt kleiner als der Nennergrad ist. Dies kann durch Division mit Rest erreicht werden.

14.1 Bemerkung. Die Zerlegung des Nenners in komplexe Linearfaktoren sei nun

$$Q(z) = \alpha \prod_{j=1}^r (z - z_j)^{m_j}$$

mit paarweise verschiedenen z_j .

Der allgemeine Fall wird im Buch von Kabbalo behandelt. Wir beschränken uns hier auf den Spezialfall, dass $m_j = 1$ für alle j mit $z_j \notin \mathbb{R}$.

Wenn $z_j = x_j + iy_j$ mit $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ und $y_j \neq 0$ eine Nullstelle von Q ist, dann kann man in der Partialbruchzerlegung die Terme von z_j und \bar{z}_j wie folgt zusammenfassen

$$\frac{c_j}{z - z_j} + \frac{\bar{c}_j}{z - \bar{z}_j} = \frac{c_j x - c_j \bar{z}_j + \bar{c}_j x - \bar{c}_j z_j}{(x - x_j - iy_j)(x - x_j + iy_j)} = \frac{2(\operatorname{Re} c_j)x - 2\operatorname{Re}(c_j \bar{z}_j)}{(x - x_j)^2 + y_j^2}.$$

Wenn die Nullstellen so angeordnet sind, dass $z_1, \dots, z_s \in \mathbb{R}$ und $z_{s+1}, \dots, z_t \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z_j > 0$, $j = s + 1, \dots, t$, dann hat die reelle Partialbruchzerlegung in dem untersuchten Spezialfall die Gestalt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{j,k}}{(z - z_j)^k} + \sum_{j=s+1}^t \frac{c_j x + d_j}{(x - x_j)^2 + y_j^2}.$$

14.2 Bemerkung. Um die Stammfunktion von $\frac{ax+b}{(x-x_j)^2+y_j^2}$ mit $a, b, x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $y_j \neq 0$, zu berechnen, bestimmt man zuerst $A, B \in \mathbb{R}$, so dass $ax + b = 2A(x - x_j) + B$. Dann

$$\int \frac{ax + b}{(x - x_j)^2 + y_j^2} dx = A \int \frac{2(x - x_j)}{(x - x_j)^2 + y_j^2} dx + B \int \frac{1}{(x - x_j)^2 + y_j^2} dx.$$

Das erste Integral ist logarithmisch. Beim zweiten substituiert man $t = \frac{x-x_j}{y_j}$ und erhält

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x - x_j)^2 + y_j^2} dx &= \frac{1}{y_j^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x-x_j}{y_j}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{y_j} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{y_j} \arctan t \\ &= \frac{1}{y_j} \arctan \frac{x - x_j}{y_j}. \end{aligned}$$

14 Integrale rationaler Funktionen

14.3 Beispiel. Bestimme

$$\int \frac{x^5 + 16}{x^4 - 16} dx.$$

Division mit Rest ergibt

$$\frac{x^5 + 16}{x^4 - 16} = x + \frac{16x + 16}{x^4 - 16}.$$

Die Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren ist $x^4 - 16 = (x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)$.
Der Ansatz für die reelle Partialbruchzerlegung ist also

$$\frac{16x + 16}{x^4 - 16} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} + \frac{cx + d}{x^2 + 4}.$$

Die Gleichung

$$\begin{aligned} 16x + 16 &= a(x+2)(x^2+4) + b(x-2)(x^2+4) + (cx+d)(x-2)(x+2) \\ &= x^3(a+b+c) + x^2(2a-2b+d) + x(4a+4b-4c) + 8a-8b-4d \end{aligned}$$

führt via Koeffizientenvergleich auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ 2a - 2b + d &= 0 \\ 4a + 4b - 4c &= 16 \\ 8a - 8b - 4d &= 16. \end{aligned}$$

Es besitzt die eindeutige bestimmte Lösung $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -2$, $d = -2$. Also

$$\frac{x^5 + 16}{x^4 - 16} = x + \frac{3}{2} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+2} - \frac{2x+2}{x^2+4}.$$

Nur die Bestimmung der Stammfunktion des letzten Teils birgt Probleme

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+2}{x^2+4} dx &= \int \frac{2x}{x^2+4} dx + \int \frac{2}{x^2+4} dx = \log(x^2+4) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx \\ &= \log(x^2+4) + \int \frac{1}{t^2+1} dt = \log(x^2+4) + \arctan t = \log(x^2+4) + \arctan \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Insgesamt

$$\int \frac{x^5 + 16}{x^4 - 16} dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} \log|x-2| + \frac{1}{2} \log|x+2| - \log(x^2+4) - \arctan \frac{x}{2}.$$

15 Taylor-Reihen

15.1 Definition. Sei I ein offenes Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $n \in \mathbb{N}$. Man sagt, f sei n -mal stetig differenzierbar oder von der Klasse C^n , wenn f n -mal differenzierbar und $f^{(n)}$ stetig ist. Wenn f stetig ist, sagt man, f sei von der Klasse C^0 . Wenn f beliebig oft differenzierbar ist, sagt man, f sei von der Klasse C^∞ . Man schreibt dann $f \in C^n(I)$ bzw. $f \in C^\infty(I)$.

15.2 Satz (Taylor-Formel). Sei I ein offenes Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^{n+1} für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Sind $a, x \in I$, so gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_{n+1}(x),$$

wobei

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Bezeichnung. Die Polynome $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ heißen *Taylor-Polynome*.

15.3 Korollar (Cauchysches Restglied). Unter den Voraussetzungen von Satz 15.2 existiert ein ξ zwischen a und x , so dass

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-a)(x-\xi)^n.$$

15.4 Korollar (Restgliedformel von Lagrange). Unter den Voraussetzungen von Satz 15.2 existiert ein ξ zwischen a und x , so dass

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

15.5 Beispiel. $f = \exp$, $a = 0$. Dann $f^{(n)}(a) = 1$ für alle n . Also

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x),$$

wobei

(a) (Cauchy-Restglied)

$$R_{n+1}(x) = \frac{\exp(\xi)}{n!} x(x-\xi)^n$$

für ein ξ zwischen 0 und x .

15 Taylor-Reihen

(b) (Lagrange-Restglied)

$$R_{n+1}(x) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

für ein (anderes) ξ zwischen 0 und x .

15.6 *Beispiel.* Bestimme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x(1 - \cos x)}.$$

Wir brauchen die Taylorentwicklung des Sinus bis $n = 3$ und die des Cosinus bis $n = 2$.

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + R_4(x),$$

wo

$$R_4(x) = \frac{\sin \xi}{24} x^4,$$

und

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + S_3(x),$$

wo

$$S_3(x) = \frac{\sin \eta}{6} x^3.$$

Also

$$\frac{x - \sin(x)}{x(1 - \cos x)} = \frac{\frac{1}{6}x^3 - \frac{\sin \xi}{24}x^4}{x(\frac{1}{2}x^2 - \frac{\sin \eta}{6}x^3)} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{\sin \xi}{24}x}{\frac{1}{2} - \frac{\sin \eta}{6}x} \rightarrow \frac{1}{3}$$

für $x \rightarrow 0$, denn $\sin \xi$ und $\sin \eta$ gehen beide gegen 0, wenn $x \rightarrow 0$.

15.7 Definition. Sei I ein offenes Intervall, sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sie heißt *reell-analytisch*, wenn es zu jedem $a \in I$ ein $r > 0$ und $c_0, c_1, \dots \in \mathbb{R}$ gibt mit $]a-r, a+r[\subseteq I$ und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad \text{für alle } x \in]a-r, a+r[.$$

In diesem Fall bezeichnet man die Reihe als *Taylorreihe* von f im Punkt a .

15.8 *Bemerkung.* Jede reell-analytische Funktion ist von der Klasse C^∞ . Es gibt aber Funktionen von der Klasse C^∞ , die nicht reell-analytisch sind. Ein Beispiel ist

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x}), & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Beweis. Es wird gezeigt: Die angegebene Funktion f ist nicht Null, aber alle ihre Taylorpolynome sind Null. □

15.9 Beispiel. (a) Für $x \in]-1, 1[$ gilt

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n.$$

Dieses Ergebnis hatten wir in Aufgabe 2 von Blatt 5 aus dem Cauchy-Produkt hergeleitet.

(b) Für $x \in]-1, 1[$ gilt

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}. \quad (15.1)$$

Insbesondere gilt

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Beweis. Um aus (15.1) die Formel für $\log 2$ herzuleiten, muss noch die Stetigkeit der Funktion

$$g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},$$

gezeigt werden. Die Konvergenz der Reihe erhalten wir mit dem Leibniz-Kriterium. Fasst man jeweils zwei Glieder zusammen, so bekommt man

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2j-1}}{2j-1} - \frac{x^{2j}}{2j} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x),$$

wobei

$$f_j(x) = \frac{x^{2j-1}}{2j(2j-1)} (2j - (2j-1)x) \geq 0.$$

Wegen $f_j'(x) = x^{2j-2} - x^{2j-1} = x^{2j-2}(1-x) > 0$ gilt für jedes j

$$0 \leq f_j(x) \leq f_j(1) = \frac{1}{2j(2j-1)}.$$

Wegen des Majorantenkriteriums 12.10 konvergiert daher die Reihe gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen eine stetige Funktion. \square

(c) Für $-1 < x < 1$ gilt

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

15 Taylor-Reihen

Bemerkung. Man kann zeigen, dass die Reihe auch für $x = \pm 1$ gegen $\arctan x$ konvergiert (Abelscher Grenzwertsatz)¹ Insbesondere gilt

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

Diese Formel liefert eine Methode, um π auszurechnen. Es ist aber vorzuziehen, die Formel $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ zu verwenden und den Arcustangens in $\frac{1}{\sqrt{3}}$ zu entwickeln. Das führt zu der viel schneller konvergenten Reihe

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n \frac{1}{2n+1}.$$

¹Anstelle der Verwendung des Abelschen Grenzwertsatzes kann man auch wie in (b) des vorigen Beispiels argumentieren.

16 Uneigentliche Integrale

16.1 Definition. (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes $t \in]a, b[$ auf $[t, b]$ Riemann-integrierbar. Wenn $\lim_{t \searrow a} \int_t^b f(x) dx$ in \mathbb{R} existiert, so schreibt man $\int_a^b f(x) dx$ für den Grenzwert und sagt, dass das *uneigentliche Integral* $\int_a^b f(x) dx$ konvergiert.

(b) Die Funktion $f:]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei für alle $t < b$ auf $[t, b]$ Riemann-integrierbar. Falls $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$ existiert, so schreibt man $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ für den Grenzwert und sagt, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ konvergiert.

(c) In den Fällen (a) und (b) sagt man, das Integral sei uneigentlich im linken Endpunkt. Analog behandelt man Integrale, die uneigentlich im rechten Endpunkt sind.

(d) Ist das Integral uneigentlich in beiden Endpunkten, so wählt man ein c zwischen den Endpunkten und definiert

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

vorausgesetzt, beide Integrale existieren.

16.2 Beispiel. (a)

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

(b) Für $c \geq 1$ divergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^c}$ und für $c < 1$ konvergiert es. In diesem Fall gilt

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^c} = \frac{1}{1-c} \quad \text{falls } c < 1.$$

16.3 Satz (Cauchy-Kriterium). Sei $f: [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ für jedes $t > a$ auf $[a, t]$ Riemann-integrierbar. Genau dann konvergiert $\int_a^{\infty} f(x) dx$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $M > a$ gibt, so dass

$$\left| \int_s^t f(x) dx \right| < \epsilon \quad \text{für alle } s, t \geq M.$$

Die Analoga für die anderen uneigentlichen Integrale gelten ebenfalls.

16 Uneigentliche Integrale

16.4 *Beispiel.* $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konvergiert.

16.5 Definition. Sei $\int_a^b f(x) dx$ ein uneigentliches Integral. Man sagt, dass es *absolut konvergiert*, wenn $\int_a^b |f(x)| dx$ konvergiert.

16.6 Satz. Sei $\int_a^b f(x) dx$ ein uneigentliches Integral. Wenn es absolut konvergiert, dann konvergiert es.

16.7 *Beispiel.* Das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konvergiert nicht absolut.

16.8 Satz (Majorantenkriterium). Die Funktionen $f, g: [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ seien für jedes $b > a$ auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, und es gelte $|g(x)| \leq f(x)$ für alle $x \geq a$. Wenn $\int_a^\infty f(x) dx$ konvergiert, dann konvergiert $\int_a^\infty g(x) dx$ absolut.

Die Analoga für die anderen uneigentlichen Integrale gelten ebenfalls.

16.9 *Beispiel.* (a) Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2) dx$ konvergiert absolut.

Wir werden in der Analysis III sehen, dass $\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$.

(b) Für jedes $x > 0$ konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt =: \Gamma(x)$$

absolut.

16.10 Satz (Integralkriterium für Reihen). Es sei $f: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton fallenden Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1$. Dann sind äquivalent:

(a) $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ konvergiert.

(b) $\int_1^\infty f(x) dx$ konvergiert.

16.11 *Bemerkung.* (a) Einen Zusammenhang zwischen den Werten von $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ und $\int_1^\infty f(x) dx$ liefert die Euler-Maclaurinsche Formel.

(b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ konvergiert genau für $s > 1$.

17 Die Gammafunktion

17.1 Definition. Die *Gamma-Funktion* ist definiert durch

$$\Gamma:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Die Konvergenz dieses uneigentlichen Integrals hatten wir schon in Beispiel 16.9 gesehen. Mit partieller Integration beweist man:

17.2 Satz. Für $x > 0$ gilt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

17.3 Korollar. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\Gamma(n) = (n-1)!$.

17.4 Bemerkung. Den Graph der Gamma-Funktion zeigt Abbildung 17.1.

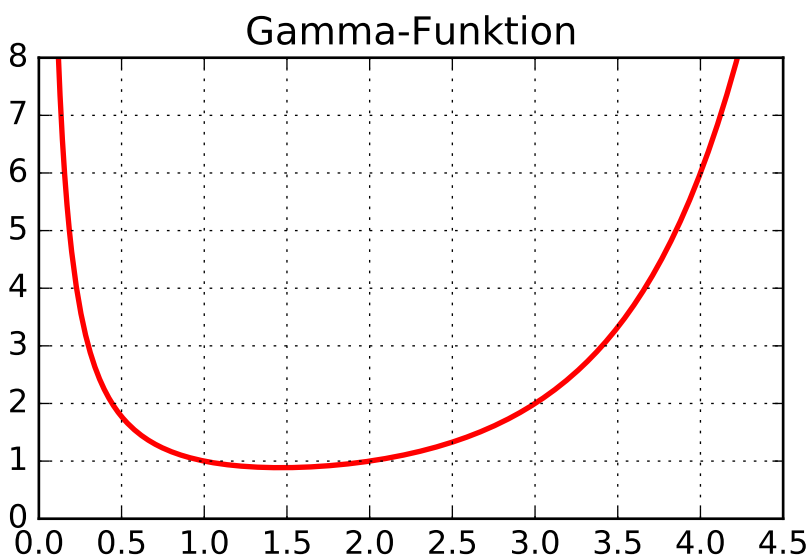


Abbildung 17.1: Graph der Gamma-Funktion

17.5 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Seien $f, \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $\varphi \geq 0$. Dann existiert $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)dx.$$

17 Die Gammafunktion

17.6 Satz (Trapez-Regel). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $[0, 1] \subseteq I$ und sei $f \in C^2(I)$. Dann existiert ein $\xi \in [0, 1]$, so dass

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} (f(0) + f(1)) - \frac{1}{12} f''(\xi).$$

Bemerkung. Wenn wir die Beziehung $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$ vorerst glauben, dann folgt

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

17.7 Satz. Für $m \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$A_m := \int_0^{\pi/2} \sin(x)^m dx.$$

Dann $A_0 = \frac{\pi}{2}$, $A_1 = 1$, und für $n \in \mathbb{N}$ gelten

$$A_{2n} = \frac{\pi}{2} \prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j}$$

$$A_{2n+1} = \prod_{j=1}^n \frac{2j}{2j+1}.$$

17.8 Satz (Wallissches Produkt).

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{4n^2}{4n^2-1}.$$

17.9 Lemma. Setzt man $\beta_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, so gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\log(n!) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log(n) - n + 1 + \int_1^n \frac{\beta_1(x)}{x} dx.$$

17.10 Definition. $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien zwei Folgen positiver Zahlen. Man sagt, sie seien *asymptotisch gleich*, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

In diesem Fall schreibt man $a \sim b$.

17.11 Satz (Stirlingsche Formel).

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

17.12 Bemerkung. Man kann diesen Beweis noch etwas verfeinern und sieht dann für $n > 1$

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12(n-1)}\right).$$

Das wird beispielsweise im Buch von Kabbalo vorgerechnet.