ANALYSIS I

VORLESUNG IM WINTERSEMESTER 2011/12

RÜDIGER W. BRAUN

Inhaltsverzeichnis

1. Mengen und Abbildungen

1.1. **Definition.** Eine Menge ist eine Zusammenfassung *verschiedener* Elemente zu einem Ganzen. Es muss prinzipiell entscheidbar sein, ob ein Element zu einer Menge gehört.

Man kann hier sehr viel formaler werden. Das interessiert aber keinen Analytiker.

1.2. **Notation.** Es gibt zwei Methoden, Mengen hinzuschreiben:

(a) Durch Aufzählung $M_1 = \{1, 5, 17\}$, $M_2 = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$.
(b) Durch Angabe einer charakterisierenden Eigenschaft: $M_3 = \{n; n \text{ gerade}\}$, $M_4 = \{p; p \text{ und } 2^p - 1 \text{ Primzahlen}\}$.
(c) Wichtige Mengen, deren Existenz wir à priori hinnehmen:
  (i) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die natürlichen Zahlen,
  (ii) $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,
  (iii) $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ die ganzen Zahlen,
  (iv) $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ die rationalen Zahlen,
  (v) $\mathbb{R}$ die reellen Zahlen. Eine genauere Beschreibung der reellen Zahlen folgt später.

1.3. **Definition.** Eine Menge A ist *Teilmenge* einer Menge B, wenn jedes Element von A aich Element von B ist. Man schreibt $A \subset B$.

1.4. *Beispiel.* $\mathbb{N} \subset \mathrm{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Von den beiden Mengen $\{1, 2\}$ und $\{2, 3\}$ ist keine Teilmenge der anderen.

1.5. *Bemerkung.* Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn $A \subset B$ und $B \subset A$.

1.6. **Definition.** Die Menge, die gar kein Element enthält, heißt *leere Menge*. Sie wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

1.7. **Definition.** Seien M_1 und M_2 zwei Mengen. Dann sind die folgenden Verknüpfungen erklärt:

(a) $M_1 \cup M_2 = \{x; x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$ (Vereinigung),
(b) $M_1 \cap M_2 = \{x; x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$ (Durchschnitt),
(c) $M_1 \setminus M_2 = \{x; x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$ (Differenz),
(d) $M_1 \triangle M_2 = (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$ (symmetrische Differenz).

Venn-Diagramme anmalen.

1.8. *Beispiel.* $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N} \cap \{0\} = \emptyset$, $\emptyset \triangle M = M$ für jede Menge M.

1.9. *Bemerkung.* Kommutativgesetz, Assoziativgesetz und Distributivgesetz für Mengen.

Die Beweise aller dieser Aussagen beruhen auf den Gesetzen der Logik. Ich führe sie nicht vor, weil sie bereits im Vorkurs gemacht wurden.

1.10. **Definition.** Sei X eine Menge. Die Menge $\mathcal{P}(X) = \{M; M \subset X\}$ heißt *Potenzmenge* von X.

1.11. *Beispiel.* $X = \{1, 2, 3\}$, dann hat $\mathcal{P}(X)$ die folgenden acht Elemente: ....
$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Diese Menge ist nicht leer.

1.12. **Definition.** Seien X, Y Mengen. Die Menge $X \times Y = \{(x, y); x \in X \text{ und } y \in Y\}$ heißt *kartesisches Produkt* der Mengen X und Y. Die Elemente von $X \times Y$ heißen *Paare.*

1.13. *Beispiel.* Für $X = \{1, 2, 3\}$ schreibe ich X^2 hin. Es hat neun Elemente.

1.14. **Definition.** Gegeben seien Menge X und Y. Eine *Abbildung* $f\colon X \to Y$ besteht aus dem *Definitionsbereich* X, dem *Zielbereich* Y und einer Vorschrift, die jedem Element aus X genau ein Element $y = f(x)$ aus Y zuordnet.

Eine Frage ist, ob zwei Abbildungen, die denselben Definitionsbereich und dieselbe Vorschrift besitzen, als gleich anzusehen sind. Algebraiker sind da steng und sagen "nein". Das ist auch der Inhalt der Definition. Analytiker sind oft geneigt, unterschiedliche Zielbereiche zu ignorieren.

1.15. **Definition.** Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, seien $M \subset X$ und $N \subset Y$.

(a) $f(M) = \{f(x); x \in M\}$ heißt *Bild* von M unter f.
(b) $f^{-1}(N) = \{x; f(x) \in N\}$ heißt *Urbild* von N unter f.

1.16. *Beispiel.* $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, $f\colon X \to Y$, $f(x) = x^2$, $M = \{1, 2\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Dann $f(M) = \{1, 4\}$, $f^{-1}(N) = \{1, 2\}$.

1.17. **Definition.** Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ zwei Abbildungen. Die *Verknüpfung* ist definiert als $g \circ f\colon X \to Z$, $g \circ f(x) = g(f(x))$.

1.18. *Beispiel.* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$. Dann $f \circ f(3) = 81$.

2. Die reellen Zahlen

Die *reellen Zahlen* sind eine Menge $\mathbb{R}$ zusammen mit zwei Rechenvorschriften, die je zwei Elementen $x, y \in \mathbb{R}$ ein Element $x + y \in \mathbb{R}$ und ein Element $x \cdot y \in \mathbb{R}$ zuordnen, und einer Vergleichsrelation $>$, welche die folgenden Axiome erfüllt:

Körperaxiome.

(a) (Kommutativgesetze) $x + y = y + x$ und $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
(b) (Assoziativgesetze) $(x + y) + z = x + (y + z)$ und $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.
(c) (Null und Eins) Es gibt Elemente $0, 1 \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq 1$ und $0 + x = x$ und $1 \cdot x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) (Inverses Element der Addition) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0$.

Es zeigt sich, dass y eindeutig bestimmt ist; man bezeichnet es mit $-x$.

(e) (Inverses Element der Multiplikation) Zu jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es eine Zahl $z \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot z = 1$.

Es zeigt sich, dass z eindeutig bestimmt ist. Man schreibt $z = x^{-1}$ oder $z = \frac{1}{x}$.

(f) (Distributivgesetz) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

2.1. **Satz.** *Das Nullelement ist eindeutig.*

2.2. **Satz.** *Das Einselement ist eindeutig.*

2.3. **Satz.** *Das additiv Inverse und das multiplikativ Inverse sind eindeutig.*

2.4. **Satz.** $0 \cdot x = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Daraus folgt dann

2.5. **Satz.** $(-1) \cdot x = -x$.

2.6. **Satz.** *Für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $-(-x) = x$. *Für jedes* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *gelten* $x^{-1} \neq 0$ *und* $(x^{-1})^{-1} = x$.

Das Buch von Schichl/Steinbauer empfehlen!

2.7. **Satz.** *Wenn* $x \cdot y = 0$, *dann* $x = 0$ *oder* $y = 0$.

Anordnungsaxiome. Es gibt eine Teilmenge P von $\mathbb{R}$, welche die beiden folgenden Axiome erfüllt:

(a) (Trichotomie) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei folgenden Möglichkeiten

$$x \in P, \; x = 0 \text{ oder } -x \in P$$

(b) (Abgeschlossenheit bezüglich Addition und Multiplikation) Sind x und y in P, dann auch $x + y$ und $x \cdot y$.

Statt $x \in P$ schreibt man $x > 0$, statt $-x \in P$ schreibt man $x < 0$. Ferner schreibt man $x < y$, falls $y - x > 0$, und $x \leq y$, falls $x < y$ oder $x = y$. Analog definiert man $>$ und $\geq$.

Falls $x > 0$, so heißt x *positiv*, falls $x < 0$, so heißt x *negativ.*

2.8. **Satz.** *Ist* $x < 0$ *und* $y < 0$, *so* $xy > 0$. *Ist* $x > 0$ *und* $y < 0$, *so* $xy < 0$.

2.9. **Satz.** *Ist* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $x \neq 0$, *so ist* $x^2 > 0$. *Speziell gilt* $1 > 0$.

2.10. **Satz.** *Ist* x *positiv, so auch* x^{-1}. *Ist* x *negativ, so auch* x^{-1}.

2.11. **Satz.** *Falls* $x < y$ *und* $z \in \mathbb{R}$ *beliebig, so gilt* $x + z < y + z$.

2.12. **Satz.** (a) *Falls* $x < y$ *und* $z > 0$, *so gilt* $xz < yz$.

(b) *Falls* $x < y$ *und* $z < 0$*, so gilt* $xz > yz$*.*

2.13. **Satz.** *Ist* $0 < x < y$*, so gilt* $x^2 < y^2$*.*
Sind umgekehrt x *und* y *beide positiv und ist* $x^2 < y^2$*, so folgt* $x < y$*.*

Arithmetische Beziehungen, die man durch bloßes Ausrechnen nachweist, wie etwa die binomischen Formeln, werden in der Vorlesung nicht noch einmal bewiesen.

2.14. **Definition.** Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man den *Absolutbetrag* als

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

2.15. **Satz.** *Sind* $x, y \in \mathbb{R}$*, so gilt* $|x \cdot y| = |x||y|$*.*

2.16. **Satz** (Dreiecksungleichung). *Sind* $x, y \in \mathbb{R}$*, so gilt* $|x + y| \leq |x| + |y|$*.*

Vollständigkeitsaxiom.

2.17. **Definition.** Sei $M \subset \mathbb{R}$. Dann heißt M *nach oben beschränkt,* wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq c$ für alle $x \in M$. Jedes c mit dieser Eigenschaft heißt *obere Schranke* von M.

M heißt *nach unten beschränkt,* wenn es ein $d \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \geq d$ für alle $x \in M$. Jedes d mit dieser Eigenschaft heißt *untere Schranke* von M.

M heißt *beschränkt,* wenn es nach oben und unten beschränkt ist.

2.18. *Beispiel.* $M = \{x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 2\}$. Dann ist M beschränkt. Eine Schranke ist $c = \frac{3}{2}$.

2.19. **Definition.** Sei $M \subset \mathbb{R}$. Wenn es ein $c \in M$ gibt, welches obere Schranke von M ist, so bezeichnet man c als das *Maximum* von M, in Zeichen $c = \max M$. Dann ist c das größte Element von M. Wenn M ein kleinstes Element hat, so bezeichnet man es als *Minimum* und schreibt $\min M$ dafür.

2.20. **Definition.** Sei $M \subset \mathbb{R}$. Wenn es eine kleinste obere Schranke von M gibt, dann bezeichnet man sie als *Supremum* von M, in Zeichen $\sup M$. Wenn es eine größte untere Schranke gibt, so bezeichnet man sie als *Infimum* von M, in Zeichen $\inf M$.

Beispiel. Sei $M = \left\{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$. Dann ist M nach oben und unten beschränkt und besitzt kein Maximum. Ferner: $\sup M = 1$ und $\inf M = \min M = 0$.

2.21. **Satz.** $M \subset \mathbb{R}$ *sei nach oben beschränkt. Für* $c \in \mathbb{R}$ *sind äquivalent:*

(a) $c = \sup M$.
(b) c *ist obere Schranke von* M *und kein* $d < c$ *ist ebenfalls obere Schranke von* M*.*
(c) *Für alle* $x \in M$ *gilt* $x \leq c$ *und für jedes* $\epsilon > 0$ *existiert ein* $x \in M$ *mit* $x > c - \epsilon$*.*

2.22. **Vollständigkeitsaxiom.** Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt in $\mathbb{R}$ ein Supremum.

2.23. *Bemerkung.* $M \subset \mathbb{R}$ sei nach oben beschränkt. M besitzt genau dann ein Maximum, wenn $\sup M \in M$. In diesem Fall $\max M = \sup M$. Die analoge Aussage für das Minimum gilt ebenfalls.

2.24. **Satz.** *Zu jedem $a > 0$ existiert genau ein $b > 0$ mit $b^2 = a$.*
Dieses b heißt Quadratwurzel von a, in Zeichen $b = \sqrt{a}$.

2.25. **Satz.** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2.26. **Definition.** Wir definieren die folgenden *Intervalle:*

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\} \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} \\
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} \\
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\} \\
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x\}. \\
(-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\} \\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R}; x < v\}
\end{aligned}$$

3. Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

3.1. **Definition.** Eine Teilmenge N von reellen Zahlen heißt *induktiv,* wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(a) $1 \in N$,
(b) wenn $n \in N$, dann auch $n + 1 \in N$.

$\mathbb{R}$ selbst ist induktiv. Der Durchschnitt induktiver Mengen ist induktiv. Daher gibt es eine kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$. Es handelt sich um die Menge der natürlichen Zahlen. Das Zeichen dafür ist $\mathbb{N}$.

3.2. **Satz** (Archimedisches Axiom). *Ist $a \in \mathbb{R}$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$.*

3.3. **Satz** (Eudoxos). *Zu jedem $b > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b$.*

3.4. **Prinzip der vollständigen Induktion.** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Wenn es gelingt, die folgenden beiden Dinge zu zeigen, dann gilt $A(n)$ für alle n:

(a) $A(1)$ gilt,
(b) wenn $A(n)$ gilt, dann auch $A(n + 1)$.

3.5. **Satz** (Bernoulli-Ungleichung). *Sei $h > -1$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

4. Folgen und ihre Grenzwerte

4.1. **Definition.** Sei X eine Menge und sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element $a_n \in X$ gegeben. Dann bezeichnet man die Aufzählung dieser a_n als *Folge*, in Zeichen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_1, a_2, a_3, \dots)$.

Folgen werden häufig *rekursiv* definiert. Man definiert dazu a_1 und gibt eine Regel an, wie aus a_n das Folgenglied a_{n+1} berechnet wird. Alternativ kann man a_{n+1} auch aus $a_1, \dots, a_n$ berechnen.

4.2. *Beispiel.* (a) Fakultät: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n$. Das definiert $n! = a_n$.

(b) Fibonacci-Folge: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n \geq 2$.

(c) Summenzeichen: Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\sum_{j=1}^{1} a_j = a_1, \quad \sum_{j=1}^{n+1} a_j = a_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

(d) Produktzeichen: Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\prod_{j=1}^{1} a_j = a_1, \quad \prod_{j=1}^{n+1} a_j = a_{n+1} \cdot \prod_{j=1}^{n} a_j.$$

4.3. **Satz** (Arithmetische und geometrische Progression). *:*

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$

(b) *Für jedes* $q \in \mathbb{R}$ *mit* $q \neq 1$ *gilt*

$$\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

4.4. **Definition.** Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ definiert man den *Binomialkoeffizienten* durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

4.5. **Satz.** *Für* $k, n \in \mathbb{N}$ *mit* $k \leq n$ *gilt*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Insbesondere sind alle Binomialkoeffizienten ganz.

4.6. **Satz** (Binomischer Lehrsatz). *Für* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

4.7. **Definition.** Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist *beschränkt,* wenn die Menge $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

4.8. *Beispiel.* (a) Für jedes $a \neq 0$ ist die Folge $(a \cdot n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt.

(b) Für jedes $q \in (-1, 1)$ ist die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt durch -1 und nach oben durch 1.

(c) Für jedes $q \in (-1, 1)$ ist die Folge $(nq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

(d) Für jedes $q \in (-1, 1)$ ist die Folge $(n^2q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

4.9. **Definition.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, und sei $b \in \mathbb{R}$. Die Folge heißt *konvergent* gegen b, falls gilt:

> Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - b| < \epsilon$.

Man sagt dann, b sei der *Grenzwert* der Folge, und schreibt $b = \lim_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \to b$.

Eine Folge heißt *divergent,* wenn sie keinen Grenzwert besitzt.

4.10. *Beispiel.* $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2}$. Da wir noch keine Rechenregeln für Grenzwerte haben, beweisen wir die Konvergenz zu Fuß.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{N} < 4\epsilon$. Dann gilt für jedes $n \geq N$

$$\left|\frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n+2-(2n+3)}{4n+6}\right| = \frac{1}{4n+6} \leq \frac{1}{4N} < \epsilon.$$

4.11. **Satz.** *Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.*

4.12. **Satz.** *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

4.13. **Satz** (Sandwichsatz). *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_n \leq b_n \leq c_n$. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen denselben Grenzwert L. Dann $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.*

4.14. *Beispiel.* (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(b) Sei $q \in \mathbb{R}$.
   - (i) Falls $|q| < 1$, so gilt $\lim q^n = 0$.
   - (ii) Falls $|q| > 1$, so divergiert die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - (iii) $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$.
   - (iv) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

4.15. *Bemerkung.* Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ heißt *Nullfolge.*

4.16. **Satz** (Rechenregeln). *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.*

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$.

(c) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = ab$.

(d) *Ist $b \neq 0$, dann $b_n \neq 0$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen und* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

4.17. **Satz.** *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *und* $a_n \le b_n$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann* $a \le b$.

4.18. **Definition.** Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend,* wenn $a_n \le a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sie heißt *streng monoton wachsend,* wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Analog definiert man (streng) monoton fallend.

4.19. **Satz.** *Ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton wachsend und beschränkt, so konvergiert die Folge und es gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$.

4.20. *Beispiel.* Sei $x > 0$. Wähle ein beliebiges $a_1 \in (0, 1/x)$ und definiere rekursiv $a_{n+1} = 2a_n - xa_n^2$. Dann gilt $\lim a_n = 1/x$.

4.21. **Definition.** Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$. Ist ferner $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel. Sei $a_n = (-1)^n$, und sei $n_k = 2k$. Dann $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (1)_{k\in\mathbb{N}}$.

4.22. **Satz.** *Jede Teilfolge einer beschränkten Folge ist beschränkt und jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent.*

4.23. **Theorem** (Satz von Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge in* $\mathbb{R}$ *besitzt eine konvergente Teilfolge.*

4.24. **Definition.** Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m \ge N$.

4.25. **Theorem** (Konvergenzkriterium von Cauchy). *Für eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{R}$ *sind äquivalent:*

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent.*
(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist eine Cauchy-Folge.*

4.26. *Beispiele.* (a) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht.
(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}$. Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Noch ein Beispiel im Nachtrag:

4.27. *Beispiel.* Sei $q \in (-1, 1)$. Dann $\lim_{n\to\infty} nq^n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} n^2 q^n = 0$.

5. Reihen

Konvergenz.

5.1. **Definition.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und sei $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$. Wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann sagt man, dass die *Reihe* $\sum_{j=1}^\infty a_j$ konvergiert und schreibt $\sum_{j=1}^\infty a_j$ für ihren Grenzwert. Wenn $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, so sagt man, dass die Reihe $\sum_{j=1}^\infty a_j$ divergiert.

Die Zahlen s_n heißen *Partialsummen* von $\sum_{j=1}^\infty a_j$.

5.2. **Satz.** *Wenn* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *konvergiert, dann ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge.*

5.3. **Konvention.** Wir setzen $x^0 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also auch für $x = 0$.

5.4. *Beispiel.* Sei $q \in \mathbb{R}$. Die *geometrische Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ divergiert für $|q| \geq 1$. Ansonsten gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1.$$

5.5. *Beispiel.* Die *harmonische Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

5.6. *Beispiel.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

5.7. **Satz** (Konvergenzkriterium von Leibniz). *Sei* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$.

Genauer: Sei $s_m = \sum\limits_{n=1}^{m} (-1)^n b_n$ *die* m*-te Partialsumme. Dann ist* $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ *monoton fallend und* $(s_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ *monoton wachsend. Beide Folgen konvergieren gegen* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$.

5.8. *Beispiel.* Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergiert. Genauer gilt beispielweise

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \geq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Wir werden später sehen, dass der Grenzwert gleich dem natürlichen Logarithmus von 2 ist.

5.9. **Definition.** Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

5.10. **Satz.** *Absolut konvergente Reihen sind konvergent.*

5.11. *Bemerkung.* Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

5.12. **Satz** (Majorantenkriterium). *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen mit* $|a_n| \leq c_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Wenn* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *konvergiert, dann konvergiert* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut.*

5.13. *Bemerkung.* (a) Man bezeichnet dann $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ als *konvergente Majorante* von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Eine Umformulierung des Majorantenkriteriums liefert: Wenn $|a_n| \le c_n$ für jedes n und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, dann divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

5.14. *Beispiel.* Für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge 2$ konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$.

5.15. **Satz** (Quotientenkriterium). *Es gebe ein* $N \in \mathbb{N}$ *und ein* $q \in \mathbb{R}$ *mit* $q < 1$, *so dass* $a_n \neq 0$ *und* $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \le q$ *für alle* $n \ge N$. *Dann ist* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

5.16. **Definition.** Die *Exponentialfunktion* ist definiert durch

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Das Quotientenkriterium zeigt, dass diese Reihe in der Tat konvergiert.

Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen.

5.17. **Definition.** Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist *injektiv,* wenn es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt. Sie heißt *surjektiv,* wenn es zu jedem $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt. Sie heißt *bijektiv,* wenn es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

5.18. *Bemerkung.* Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Setze $W = \{f(x); x \in X\}$ und definiere eine neue Abbildung $g\colon X \to W$ mit derselben Vorschrift $g(x) = f(x)$ für alle $x \in X$. Dann ist g surjektiv.

5.19. *Beispiel.* Die Quadratfunktion $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, ist weder injektiv noch surjektiv, die Nullabbildung $0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$, auch nicht. Die Identität $\mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, ist bijektiv. Wir werden später sehen, dass die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv, aber nicht surjektiv ist.

5.20. **Definition.** Es sei $f\colon X \to Y$ bijektiv mit *Graph* $\mathcal{G} = \{(x, f(x); x \in X\}$. Setze $\mathcal{H} = \{(y, x); (x, y) \in \mathcal{G}\}$. Dann ist $\mathcal{H}$ ebenfalls Graph einer Abbildung. Sie heißt *Umkehrabbildung* von f, man schreibt f^{-1}. Die Umkehrabbildung ist dadurch bestimmt, dass $f^{-1}(y) = x$ genau dann gilt, wenn $f(x) = y$.

5.21. *Beispiel.* $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$. Wir haben bereits gesehen, dass f bijektiv ist. Die Umkehrabbildung f^{-1} ist die Wurzelfunktion $f^{-1}\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

5.22. **Satz.** *Es seien* $f\colon X \to Y$ *und* $g\colon Y \to X$ *zwei Abbildungen mit* $g \circ f = \mathrm{id}_X$ *und* $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. *Dann sind* f *und* g *bijektiv, und es gelten* $g = f^{-1}$ *und* $f = g^{-1}$.

Dezimaldarstellung.

(a) Ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\{0,1,\dots,9\} = Z$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty c_n 10^{-n}$ gegen eine Zahl in $[0,1]$.

(b) Ist X die Menge aller Folgen in Z und definiert man
$$\varphi\colon X \to [0,1], \quad (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^\infty c_n 10^{-n},$$
so ist φ surjektiv.

(c) Ist $n\in\mathbb{N}$ und $c = (c_1,\dots,c_n,9,9,9,\dots)$ mit $c_n < 9$, so gilt $\varphi(c) = \varphi(c_1,\dots,c_{n-1},1+c_n,0,0,0,\dots)$.

(d) Sei $Y = \{(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X; \text{für unendlich viele } n \text{ ist } c_n \neq 9\}$, dann erhält man eine Bijektion
$$\psi\colon Y \to [0,1), \quad (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \varphi((c_n)_{n\in\mathbb{N}}).$$

Absolut konvergente Reihen.

5.23. *Beispiel.* $\frac12 - \frac12 + \frac13 - \frac13 + \frac14 - \frac14 \pm \dots$ ist konvergent und hat die Summe 0. Die Umordnung
$$\frac12 + \frac13 + \underbrace{\frac14 - \frac12}_{-\frac14} + \frac15 + \underbrace{\frac16 - \frac13}_{-\frac16} + \frac17 + \underbrace{\frac18 - \frac14}_{-\frac18} + \dots$$
ist nach dem Leibniz-Kriterium ebenfalls konvergent, hat aber einen Reihenwert $> \frac12$. Die Umordnung
$$\frac12 + \underbrace{\frac13 + \frac14}_{\geq\frac12} - \frac12 + \underbrace{\frac15 + \dots + \frac18}_{\geq\frac12} + \underbrace{\frac19 + \dots + \frac1{16}}_{\geq\frac12} - \frac13 + \dots$$
ist divergent.

5.24. **Satz** (Umordnungssatz). *Sei* $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ *eine absolut konvergente Reihe und* σ *eine Bijektion von* $\mathbb{N}$ *auf sich. Setze* $b_n = a_{\sigma(n)}$. *Dann ist* $\sum\limits_{n=1}^\infty b_n$ *absolut konvergent und* $\sum\limits_{n=1}^\infty b_n = \sum\limits_{n=1}^\infty a_n$.

5.25. **Satz** (Cauchy-Produkt). *Seien* $\sum_{n=0}^\infty a_n$ *und* $\sum_{n=0}^\infty b_n$ *absolut konvergent, und sei*
$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k}.$$
Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^\infty c_n$ *absolut konvergent, und es gilt*
$$\sum_{n=0}^\infty c_n = \left(\sum_{n=0}^\infty a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^\infty b_n\right).$$

5.26. **Satz** (Additionstheorem für die Exponentialfunktion). *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

5.27. **Korollar.** *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(x) > 0$.

6. Stetige Funktionen

6.1. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{R}$, sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x_0 \in D$. Dann heißt f *stetig in* x_0, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt: Ist $x \in D$ und $|x - x_0| < \delta$, dann $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Eine Funktion heißt *stetig,* wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist.

6.2. *Bemerkung.* Allquantor $\forall$ und Existenzquantor $\exists$.

$f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Entsprechend ist f unstetig in x_0, wenn

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D : |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon.$$

6.3. *Beispiel.*
(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist stetig.
(b) Konstante Funktionen sind stetig.
(c) Definiere $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Dann ist f unstetig.

6.4. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt x_0 *Berührpunkt* von D, wenn es eine Folge in D gibt, die gegen x_0 konvergiert.

6.5. **Definition.** Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$, und sei x_0 ein Berührpunkt von D. Wir schreiben $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ gilt, dass $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$.

6.6. **Satz.** *Sei* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *eine Funktion, und sei* $x_0 \in D$. *Dann sind äquivalent:*

(a) f *ist stetig in* x_0.
(b) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

6.7. **Satz.** *Seien* $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ *stetig in* x_0. *Dann sind auch die folgenden Funktionen stetig in* x_0:

(a) $f + g$ *mit* $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
(b) $f - g$ *und* $f \cdot g$, *die ebenfalls punktweise definiert sind.*
(c) *Falls* $g(x_0) \neq 0$, *so ist auch* f/g *stetig in* x_0.

6.8. **Definition.** Eine Funktion der Form $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, heißt *Polynom.*

Sind p, q zwei Polynome, wobei q nicht das Nullpolynom ist, und ist $D = \{x \in \mathbb{R}; q(x) \neq 0\}$, so bezeichnet man die Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

als *gebrochen-rationale* Funktion.

6.9. *Bemerkung.* Polynome und gebrochen-rationale Funktionen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich.

6.10. **Satz.**

$$\left|\exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}\right| \leq 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \quad \textit{falls } |x| \leq 1 + \frac{N}{2}.$$

Damit kann man die *Eulersche Zahl* $e = \exp(1)$ so genau ausrechnen, wie man möchte: $e = 2.7182818285\ldots$.

6.11. **Satz.** *Die Exponentialfunktion ist stetig.*

6.12. **Satz.** *Seien* $D, E \subset \mathbb{R}$ *und* $f\colon D \to E$, $g\colon E \to \mathbb{R}$ *Funktionen. Ist* f *stetig in* $x_0 \in D$ *und* g *stetig in* $f(x_0)$, *so ist* $g \circ f$ *stetig in* x_0.

6.13. *Beispiel.* Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(-x^2)$, ist stetig. Ihr Graph ist die *Gaußsche Glockenkurve.*

6.14. **Definition.** Intervalle der Form $[a, b]$ mit reellen Zahlen $a < b$ heißen *kompakt.*

6.15. **Theorem** (Nullstellensatz von Bolzano). *Es seien* $a, b \in \mathbb{R}$, *und es sei* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion mit* $f(a) < 0$ *und* $f(b) > 0$. *Dann gibt es ein* $c \in (a, b)$ *mit* $f(c) = 0$.

6.16. **Korollar** (Zwischenwertsatz). *Sei* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann nimmt* f *alle Werte zwischen* $f(a)$ *und* $f(b)$ *an.*

6.17. **Definition.** Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, sei $A \subset X$ und sei $B \subset Y$. Dann definieren wir die *Bildmenge* von A als

$$f(A) = \{f(x); x \in A\}$$

und die *Urbildmenge* von B als

$$f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}.$$

6.18. *Bemerkung.* Wenn f bijektiv ist, dann hat $f^{-1}(B)$ zwei Bedeutungen, nämlich die Bildmenge unter f^{-1} und die Urbildmenge unter f. Beide Definitionen stimmen aber überein.

6.19. **Satz.** *Sei* I *ein kompaktes Intervall und sei* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann nimmt* f *auf* I *ihr Maximum und ihr Minimum an, d. h. es gibt* $c, d \in I$, *so dass* $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ *für alle* $x \in I$.

6.20. **Korollar.** *Sei* I *ein Intervall und* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann ist* $f(I)$ *ein Intervall oder eine einpunktige Menge.*

6.21. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt, dass $f(x_1) \leq f(x_2)$, dann heißt f *monoton wachsend.* Wenn sogar immer $f(x_1) < f(x_2)$ gilt, dann heißt f *streng monoton wachsend.* Entsprechend erklärt man (streng) monoton fallend.

6.22. *Bemerkung.* Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Wegen Korollar 6.20 ist $f(I) = J$ ein Intervall. Dann ist $f\colon I \to J$ bijektiv und besitzt daher eine Umkehrfunktion $f^{-1}\colon J \to I$. Die Umkehrfunktion f^{-1} ist streng monoton wachsend. Die analogen Aussagen gelten für streng monoton fallendes f.

6.23. **Satz.** *Die Umkehrfunktion einer auf einem Intervall erklärten stetigen, streng monotonen Funktion ist stetig.*

6.24. *Beispiel.*
(a) Ist n eine ungerade natürliche Zahl, so ist die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, streng monoton wachsend und stetig. Sie ist auch bijektiv (sieht man beispielsweise mit der Bernoulli-Ungleichung und dem Zwischenwertsatz). Sie besitzt also eine stetige Umkehrfunktion $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.
(b) Ist n eine gerade natürliche Zahl, so ist die Abbildung $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^n$, streng monoton wachsend und stetig. Sie ist ebenfalls bijektiv. Sie besitzt also eine stetige Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

7. Die komplexen Zahlen

7.1. **Definition.** Auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert man eine Addition und eine Multiplikation durch

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$
$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

7.2. **Satz.** *Diese Rechenoperationen erfüllen die Körperaxiome.*

7.3. *Bemerkung.*
(a) Die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 0)$, ist bijektiv und mit den Rechenoperationen verträglich. Man versteht daher $\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{R}^2$ mit den Operationen aus 7.1 und schreibt für $(x, 0)$ einfach wieder x.
(b) Man setzt $i = (0, 1)$. Dann $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Ferner gilt für $y \in \mathbb{R}$, dass $iy = (0, 1) \cdot (y, 0) = (0, y)$. Also $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$. Wir werden in Zukunft die Schreibweise $x + iy$ benutzen.

7.4. **Bezeichnung.** $\mathbb{R}^2$, versehen mit diesen Rechenregeln, bezeichnet man als den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Das Element $(0,1)$ schreibt man als i. Die Rechenregeln lauten in dieser Schreibweise

$$(x+iy)+(u+iv)=(x+u)+(y+v)i,$$
$$(x+iy)(u+iv)=(xu-yv)+(xv+uy)i.$$

Für $z=x+iy$ mit $x,y\in\mathbb{R}$ bezeichnet man x als *Realteil* und y als *Imaginärteil* von z. Man schreibt $x=\mathrm{Re}(z)$ und $y=\mathrm{Im}(z)$.

7.5. **Definition.** Ist $z=x+iy\in\mathbb{C}$ mit $x,y\in\mathbb{R}$, so heißt $\overline{z}=x-iy$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl.*

7.6. **Satz.** *Für $z,w\in\mathbb{C}$ gelten*

(a) $\overline{\overline{z}}=z$,
(b) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$,
(c) $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$,
(d) $\mathrm{Re}\,z=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$ *und* $\mathrm{Im}\,z=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$,
(e) $z\overline{z}\in\mathbb{R}$ *mit* $z\overline{z}\geq 0$.

7.7. **Definition.** Der *Absolutbetrag* von $z\in\mathbb{C}$ ist definiert als

$$|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Für reelle x stimmen die beiden Definitionen von $|x|$ überein.

7.8. **Satz.** *Für $z,w\in\mathbb{C}$ gelten*

(a) $|zw|=|z||w|$,
(b) $|\overline{z}|=|z|$.
(c) *(Dreiecksungleichung)* $|z+w|\leq|z|+|w|$.
(d) $||z|-|w||\leq|z-w|$.

Daher bezeichnet man $|z-w|$ als den Abstand der komplexen Zahlen z und w. Wer einen Abstandsbegriff hat, der hat auch einen Konvergenzbegriff.

7.9. **Definition.** Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, und es sei $z_0\in\mathbb{C}$. Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen z_0, wenn es zu jedem $\epsilon>0$ ein $N\in\mathbb{N}$ gibt, so dass $|z_n-z_0|<\epsilon$ für alle $n\geq N$. Man schreibt in diesem Fall $\lim_{n\to\infty}z_n=z_0$.

7.10. **Satz.** *Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Die Folge ist genau dann konvergent, wenn die reellen Folgen $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. In diesem Fall gilt*

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}(z_n)+i\lim_{n\to\infty}\mathrm{Im}(z_n).$$

Daraus sieht man, dass die Rechenregeln 4.16 auch für komplexe Folgen gelten.

7.11. **Satz** (Cauchy-Kriterium). *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(a) *Die Folge konvergiert.*
(b) *Zu jedem* $\epsilon > 0$ *existiert ein* $N \in \mathbb{N}$, *so dass für alle* $n, m \geq N$ *gilt* $|z_n - z_m| < \epsilon$.

7.12. **Definition.** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, und es sei $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$ die n-te Partialsumme. Man sagt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. In diesem Fall ist $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^\infty a_n$ der Reihenwert.

Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_j$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n\to\infty}|a_n|$ konvergiert.

7.13. **Satz.** *Majorantenkriterium, Quotientenkriterium, Umordnungssatz und der Satz über das Cauchy-Produkt gelten auch für komplexe Reihen.*

7.14. **Definition.** Die komplexe Exponentialfunktion ist durch dieselbe Reihe definiert wie die reelle:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}.$$

7.15. **Definition.** Es sei $D \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $f \colon D \to \mathbb{C}$ heißt stetig in $z_0 \in D$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Eine Funktion heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist.

7.16. **Satz.** *Es sei* $f \colon D \to \mathbb{C}$ *und es sei* $z_0 \in D$. *Dann sind äquivalent:*

(a) f *ist stetig in* z_0.
(b) $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, *d. h. für jede Folge* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* D *mit* $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$.

7.17. **Satz.** *Die Rechenregeln für stetige Funktionen (Sätze 6.7 und 6.12) gelten auch für komplexe Funktionen. Insbesondere sind Polynome stetig auf ganz* $\mathbb{C}$ *und gebrochen rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.*

Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist stetig.*

8. Spezielle Funktionen

8.1. **Definition.** (a) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, wenn es zu jedem $C \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n > C$ für alle $n \geq N$. Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, wenn es zu jedem $C \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n < C$ für alle $n \geq N$.

(b) Es sei $D \subset \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt, und es sei $f \colon D \to \mathbb{R}$. Für $a \in \mathbb{R}$ oder $a = \pm\infty$ schreiben wir $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$. Analog für $-\infty$.

Achtung: Es gibt unbeschränkte Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die weder $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ noch $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ gilt.

8.1. Exponentialfunktion.

8.2. **Satz** (Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion). (a) $\exp(0) = 1$.

(b) $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ *für alle* $z, w \in \mathbb{C}$.

(c) *Für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *ist* $\exp(z) \neq 0$ *und*

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}.$$

(d) *Für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *ist* $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$.

(e) *Für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $|\exp(ix)| = 1$.

8.3. **Satz** (Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion). (a) *Für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\exp(x) > 0$.

(b) $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend.*

(c) $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

(d) *Für jedes* $m \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^m} = \infty$$

8.2. Der Logarithmus.

8.4. **Definition.** Die Umkehrfunktion von $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ heißt *natürlicher Logarithmus.* Man schreibt $\log(x)$.

8.5. **Satz.** (a) *Der natürliche Logarithmus ist stetig und streng monoton wachsend.*

(b) *Für* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\log(\exp(x)) = x$, *für* $x > 0$ *ist* $\exp(\log(x)) = x$.

(c) $\log((0, \infty)) = \mathbb{R}$.

(d) *Für* $x, y > 0$ *ist* $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(e) $\log(1) = 0$, $\log(e) = 1$.

(f) *Für* $x > 0$ *ist* $\log(1/x) = -\log(x)$.

(g) $\lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty$ *und* $\lim_{x\searrow 0} \log(x) = -\infty$.

(h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$.

8.3. Die allgemeine Potenzfunktion.

8.6. **Definition.** Für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ definieren wir $a^z = \exp(z \log a)$.

8.7. *Bemerkung.* (a) Man überlegt sich leicht, dass diese Definition mit den bereits bestehenden Spezialfällen a^n, a^{-1} und $a^{1/n}$ kompatibel ist.

(b) Es gilt speziell $e^z = \exp(z)$.

8.8. **Satz.** (a) *Für* $a > 0$ *und* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt* $(a^x)^y = a^{xy}$.

(b) *Für* $a > 0$ *und* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt* $a^{z+w} = a^z a^w$.

(c) *Für* $a, b > 0$ *und* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $(ab)^z = a^z b^z$.

(d) *Für* $a > 0$ *und* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\left(\frac{1}{a}\right)^z = a^{-z}$.

8.4. Trigonometrische Funktionen.

8.9. Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet $\sin(x) = \operatorname{Im}(\exp(ix))$ den *Sinus* von x und $\cos(x) = \operatorname{Re}(\exp(ix))$ den *Cosinus* von x.

8.10. Satz. (a) $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ *und* $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

(b) *Sinus und Cosinus sind stetig.*

(c) $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

(d) $\cos(-x) = \cos(x)$ *und* $\sin(-x) = -\sin(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(e) *Für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *gilt der* trigonometrische Pythagoras:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

(f) *Für* $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Bemerkung. Die komplexen trigonometrischen Funktionen werden mittels der Eigenschaft (a) aus Satz 8.10 definiert:

$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \quad \text{und} \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

8.11. Satz (Additionstheoreme). *Für* $x, y \in \mathbb{R}$ *gelten*

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

8.12. *Bemerkung.* Speziell $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ und $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$.

8.13. Lemma. *Für* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\cos y - \cos x = -2\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

8.14. *Beispiel.* Für $0 \le x \le \sqrt{12}$ erhalten wir aus dem Konvergenzkriterium von Leibniz

$$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

8.15. Lemma. *Die Cosinusfunktion ist auf dem Intervall* $[0, 2]$ *streng monoton fallend.*

Es gelten $\cos 0 = 1$ und $\cos 2 \le 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} = -\frac{1}{3} < 0$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt die Existenz einer Nullstelle des Cosinus im Intervall $(0, 2)$. Da der Cosinus auf diesem Intervall streng monoton ist, gibt es genau eine solche Nullstelle.

8.16. Definition. Die *Kreiszahl* π ist dadurch definiert, dass $\frac{\pi}{2}$ die Nullstelle des Cosinus im Intervall $(0, 2)$ ist.

8.17. Satz. (a) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gelten* $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ *und* $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

(b) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gelten* $\sin(x + \pi) = -\sin x$ *und* $\cos(x + \pi) = -\cos x$.

(c) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gelten* $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ *und* $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

(d) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, $\cos(2\pi) = 1$ *und* $\sin(2\pi) = 0$.

(e) $\{x \in \mathbb{R}; \cos x = 0\} = \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(f) $\{x \in \mathbb{R}; \sin x = 0\} = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

8.18. Definition. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ definiert man

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ definiert man

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

8.5. Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen.

8.19. Satz. (a) *Die Funktion* $\cos$ *ist auf dem Intervall* $[0, \pi]$ *streng monoton fallend und bildet es bijektiv auf* $[-1, 1]$ *ab. Ihre Umkehrfunktion ist* $\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$.

(b) *Die Funktion* $\sin$ *ist auf dem Intervall* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *streng monoton wachsend und bildet es bijektiv auf* $[-1, 1]$ *ab. Ihre Umkehrfunktion ist* $\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(c) *Die Funktion* $\tan$ *ist auf dem Intervall* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *streng monoton wachsend und bildet es bijektiv auf* $\mathbb{R}$ *ab. Ihre Umkehrfunktion ist* $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

8.6. Weitere Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion.

8.20. *Bemerkung.* (a) $\exp(2\pi i) = 1, \exp(\pi i) = -1, \exp(\pi i/2) = i$ und $\exp(3\pi i/2) = -i$.

(b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$. Man sagt: "exp hat die Periode $2\pi i$."

(c) Ist $x \in \mathbb{R}$, so gilt $\exp(ix) = 1$ genau dann, wenn $x = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

(d) (Polarkoordinaten) Ist $z \in \mathbb{C}$, so existieren $\varphi \in \mathbb{R}$ und $r \geq 0$ mit

$$z = re^{i\varphi}.$$

(e) Seien $r, s \geq 0$ und $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Für $z = re^{i\varphi}$ und $w = se^{i\psi}$ gilt $zw = rse^{i(\varphi+\psi)}$.

(f) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(g) Zu jedem $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es genau n Zahlen $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$.

(h) Insbesondere gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau n Zahlen w mit $w^n = 1$. Diese Zahlen sind die n-*ten Einheitswurzeln*.

8.7. **Landau-Symbole.** Achtung: Die Landau-Symbole bezeichnen *keine* Funktionen.

8.21. **Definition.** Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Es sei

- $a \in \mathbb{R}$ ein Berührpunkt von D, oder
- $a = \infty$ und D nach oben unbeschränkt, oder
- $a = -\infty$ und D nach unten unbeschränkt.

Dann schreibt man

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to a,$$

falls

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Man schreibt

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to a,$$

falls

- $a = \infty$ und es gibt $C > 0$, so dass $f(x) \leq Cg(x)$ für alle $x \in D$ mit $x > C$,
- $a = -\infty$ und es gibt $C > 0$, so dass $f(x) \leq Cg(x)$ für alle $x \in D$ mit $x < -C$,
- $a \in \mathbb{R}$ und es gibt $\epsilon, C > 0$, so dass $f(x) \leq Cg(x)$ für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \epsilon$.

8.22. *Beispiel.* (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $x^n = o(\exp(x))$, $x \to \infty$.
(b) $|\log x| = o(\frac{1}{x})$, $x \to 0$.
(c) $|\cos x| = O(1)$, $x \to \infty$.

9. Differentialrechnung

9.1. **Definition.** $D \subset \mathbb{R}$ heißt *offen,* wenn es zu jedem $x \in D$ ein $\epsilon > 0$ gibt mit $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset D$.

9.2. **Satz.** $D \subset \mathbb{R}$ *ist genau dann offen, wenn* D *Vereinigung von offenen Intervallen ist.*

9.3. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen, sei $f \colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x_0 \in D$. Falls

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert (in $\mathbb{R}$), dann sagt man, f sei in x_0 *differenzierbar,* und schreibt $f'(x_0)$ für den Grenzwert. In diesem Fall bezeichnet man $f'(x_0)$ als *Ableitung* von f in x_0.

Ist f in jedem Punkt von D differenzierbar, so heißt f differenzierbar in D. Dann ist $f' \colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

9.4. *Bemerkung.* Je nach Kontext schreibt man auch $\frac{df}{dx}(x_0)$ oder $\dot{f}(x_0)$ für die Ableitung.

9.5. *Beispiel.* (a) Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar mit $f' = 0$.

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar mit $f' = 1$.
(c) exp, sin und cos sind in $x_0 = 0$ differenzierbar. Es gelten $\exp'(0) = 1$, $\sin'(0) = 1$ und $\cos'(0) = 0$.
(d) $\exp' = \exp$.
(e) $\cos' = -\sin$.

9.6. **Satz.** *Es seien $D \subset \mathbb{R}$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann ist f genau dann differenzierbar in x_0, wenn es eine in x_0 stetige Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ gibt mit*

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$$

für alle $x \in D$. In diesem Fall gilt $\varphi(x_0) = f'(x_0)$.

9.7. **Satz.** *Wenn f in x_0 differenzierbar ist, dann ist f in x_0 stetig.*

9.8. **Satz** (Rechenregeln). *Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen, seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*
(a) *$f + g$ ist differenzierbar mit $(f + g)' = f' + g'$.*
(b) *(Produktregel) fg ist differenzierbar mit $(fg)' = f'g + g'f$.*
(c) *Ist $c \in \mathbb{R}$, so ist cf differenzierbar mit $(cf)' = cf'$.*
(d) *Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar mit*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

9.9. **Korollar.** *Polynome sind differenzierbar. Genauer gilt für $p(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n$, dass $p'(x) = \sum_{n=1}^{m} a_n n x^{n-1}$. Gebrochen rationale Funktionen sind überall dort differenzierbar, wo sie definiert sind.*

9.10. **Satz** (Kettenregel). *Seien $D, E \subset \mathbb{R}$ offen, und $f\colon D \to E$ und $g\colon E \to \mathbb{R}$ Funktionen. Ist f differenzierbar in $x_0 \in D$ und g differenzierbar in $f(x_0)$, dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x_0, und es gilt*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

9.11. *Beispiel.* (a) $\sin' = \cos$, denn $\sin x = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$.
(b) $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

9.12. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Sei $x_0 \in D$, sei f in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Sei g die Umkehrfunktion von f. Dann ist g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

9.13. *Beispiel.* $\log'(y) = \frac{1}{y}$.

9.14. **Satz.**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

9.15. *Beispiel.* (a) $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$.

(b) $\arcsin'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ für $-1 < y < 1$.

9.16. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen. Ist f differenzierbar in D und f' differenzierbar in $x_0 \in D$, so heißt f *zweimal differenzierbar* in x_0. Man schreibt dann $f''(x_0)$. Analog definiert man f'''. Wenn das nicht reicht, geht man zu folgender Notation über:

$$f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', \dots, f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)', \dots$$

9.17. *Beispiel.* Für fest gewähltes $\alpha \in \mathbb{R}$ definiere $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \log(x))$. Dann

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \quad f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}.$$

10. Der Mittelwertsatz und seine Folgerungen

10.1. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{R}$, sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x_0 \in D$. Wir sagen, dass f in x_0 ein *(globales) Maximum* hat, wenn f keinen größeren Funktionswert als $f(x_0)$ annimmt. In diesem Fall bezeichnet man x_0 als *Maximalstelle.* Analog definiert man Minima und Minimalstellen.

Beispiel. Der Cosinus hat in jedem Punkt der Form $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, eine Maximalstelle. Das Maximum ist 1.

10.2. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{R}$, sei $f\colon D \to \mathbb{R}$, und sei $x_0 \in D$. Wir sagen, dass f in x_0 ein *lokales Maximum* hat, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass gilt:

ist $x \in D$ mit $|x - x_0| < \epsilon$, so ist $f(x) \le f(x_0)$.

In diesem Fall bezeichnet man x_0 als *lokale Maximalstelle*. Wenn sogar gilt:

ist $x \in D$ mit $0 < |x - x_0| < \epsilon$, so ist $f(x) < f(x_0)$,

dann ist x_0 eine *strikte* lokale Maximalstelle. Analoge Definitionen gelten für Minima und Extrema.

Bemerkung. Seien $a < x_0 < b$ und sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Dann ist x_0 genau dann ein lokales Maximum von f, wenn es ein offenes Intervall $I \subset (a,b)$ mit $x_0 \in I$ gibt, so dass x_0 (globale) Maximalstelle der eingeschränkten Funktion $\widetilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ ist.

10.3. **Satz.** *Sei* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *eine Funktion. Sei* $x_0 \in (a,b)$ *eine lokale Extremalstelle von* f. *Falls* f *in* x_0 *differenzierbar ist, so gilt* $f'(x_0) = 0$.

10.4. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Falls $f'(x_0) = 0$, so heißt x_0 *kritische Stelle* von f.

Beispiel. Die Umkehrung von Satz 10.3 gilt nicht. Beispielsweise besitzt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, in $x_0 = 0$ eine kritische Stelle.

10.5. **Satz** (Satz von Rolle). *Es sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, die auf* (a,b) *differenzierbar ist. Falls* $f(a) = f(b)$*, so gibt es ein* $x \in (a,b)$ *mit* $f'(x) = 0$*.*

10.6. **Theorem** (Mittelwertsatz). *Es sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, die auf* (a,b) *differenzierbar ist. Dann gibt es ein* $x \in (a,b)$ *mit*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

10.7. **Satz.** *Sei* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar mit* $f'(x) = 0$ *für alle* $x \in (a,b)$*. Dann ist* f *konstant.*

10.8. **Satz.** *Sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und auf* (a,b) *differenzierbar. Dann gilt:*

(a) *Falls* $f'(x) > 0$ *für alle* $x \in (a,b)$*, so ist* f *streng monoton wachsend.*
(b) f *ist genau dann monoton wachsend, wenn* $f'(x) \geq 0$ *für alle* $x \in (a,b)$*.*

Beispiel. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, ist streng monoton wachsend. Trotzdem besitzt f' eine Nullstelle im Ursprung.

10.9. **Satz.** *Sei* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar. Sei* $x_0 \in (a,b)$*, und sei* f *zweimal differenzierbar in* x_0 *mit* $f'(x_0) = 0$ *und* $f''(x_0) > 0$*. Dann besitzt* f *in* x_0 *ein striktes lokales Minimum. Falls* $f'(x_0) = 0$ *und* $f''(x_0) < 0$*, so besitzt* f *in* x_0 *ein striktes lokales Maximum.*

Beispiel. (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\cos(x)$. Dann $f'(x) = \cos(x) - x\sin(x)$. Wegen $f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\frac{1}{2}\sqrt{2} > 0$ und $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$ besitzt f' in $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ eine Nullstelle x_0. Dort gilt

$$f''(x_0) = -2\sin(x_0) - x\cos(x_0) < 0$$

Also besitzt f in x_0 ein striktes lokales Maximum.

(b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4$, besitzt in $x_0 = 0$ ein striktes lokales Minimum (welches sogar global ist). Es gilt aber $f''(0) = 0$. Daher liefert Satz 10.9 kein notwendiges Kriterium.

(c) Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{2} + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auf Blatt 9 wird gezeigt werden, dass f im Ursprung differenzierbar ist mit $f'(0) = \frac{1}{2}$. Ich zeige hier, dass es keine Umgebung von 0 gibt, in der f monoton wächst.

Wir nehmen als Widerspruchsannahme an, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass f in $(0,\epsilon)$ monoton wächst. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\frac{1}{2k\pi} < \epsilon$. Wegen $\frac{\pi}{2} < 2$ kann k so groß gewählt werden, dass $4k(4-\pi)-\pi>0$. Setze

$$x_1 = \frac{1}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{1}{2k\pi}.$$

Dann $x_1 < x_2$ und

$$f(x_1) = \frac{1}{(4k+1)\pi} + \frac{1}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}, \qquad f(x_2) = \frac{1}{4k\pi}.$$

Es gilt

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{(4k+1)\pi} + \frac{4}{(4k+1)^2\pi} - \frac{1}{4k\pi} = \frac{4k\pi(4k+1) + 16k - \pi(4k+1)^2}{4k(4k+1)^2\pi^2}.$$

Wir berechnen den Zähler

$$16k^2\pi + 4k\pi + 16k - 16k^2\pi - 8k\pi - \pi = 4k(4-\pi) - \pi > 0.$$

Also $f(x_1) > f(x_2)$. Damit ist gezeigt, dass f auf $(0,\epsilon)$ nicht monoton wächst. Dem Graphen in Abbildung 1 kann man das nicht ansehen.

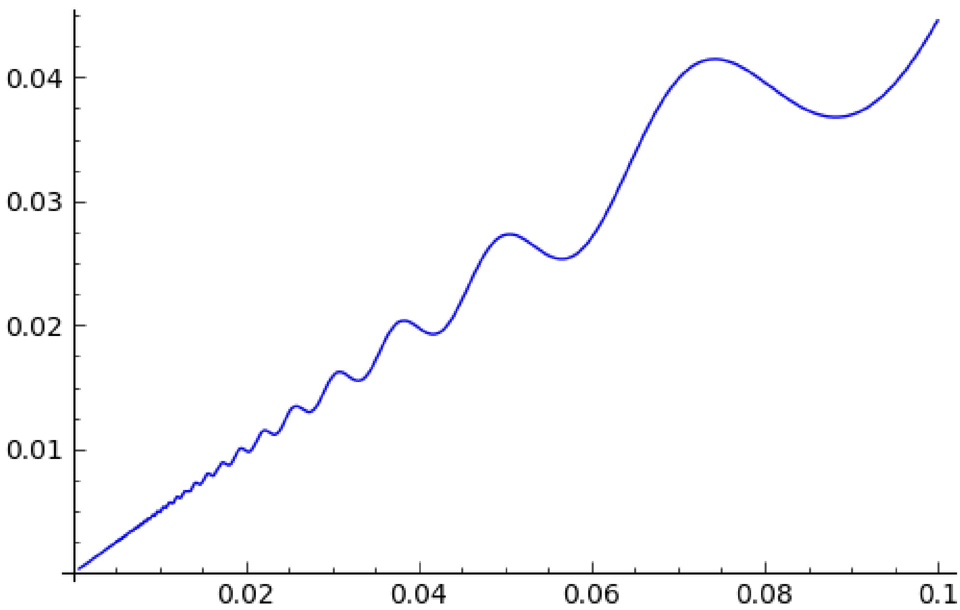

ABBILDUNG 1. Graph der Funktion aus Beispiel 10.9(c)

10.10. **Definition.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex,* wenn für jede Wahl von $c, x, d \in I$ mit $c < x < d$ gilt

$$f(x) \leq f(c) + \frac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c).$$

f heißt *konkav,* wenn $-f$ konvex ist.

10.11. *Beispiel.* Die Betragsfunktion ist konvex.

10.12. **Definition.** $M \subset \mathbb{R}^2$ heißt *konvex,* wenn zu je zwei Punkten $P, Q \in M$ die Verbindungsstrecke von P und Q in M liegt.

10.13. *Bemerkung.* $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn $\{(x, y); x \in I,\ y \geq f(x)\}$ konvex ist.

10.14. **Satz.** *$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und auf (a, b) zweimal differenzierbar. Genau dann ist f konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$.*

10.15. **Satz** (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). *Seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann existiert $x \in (a, b)$ mit*

$$(f(b) - f(a))g'(x) = (g(b) - g(a))f'(x).$$

10.16. **Satz** (1. Regel von de l'Hôpital). *Die Funktionen f und g seien differenzierbar auf dem Intervall (a, b), es sei $g'(x) \neq 0$ für alle x, und es gelte $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = 0 = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x)$. Falls $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, und beide Grenzwerte stimmen überein.*

10.17. **Satz** (2. Regel von de l'Hôpital). *Die Funktionen f und g seien differenzierbar auf dem Intervall (a, b), es sei $g'(x) \neq 0$ für alle x, und es gelte $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = \infty$. Falls $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, und beide Grenzwerte stimmen überein.*

10.18. *Bemerkung.* Die Varianten der ersten und zweiten Regel von de l'Hôpital für $x \nearrow b$ und $x \to \pm\infty$ gelten ebenfalls. Die Regeln gelten außerdem für den Fall $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$.

10.19. *Beispiel.*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{\sin(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{2x \cos(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

11. Integralrechnung

11.1. **Definition.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls es $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ gibt mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, so dass f auf den Intervallen (x_{k-1}, x_k), $k = 1, \dots, n$, konstant ist, so heißt f *Treppenfunktion.* Mit $\mathcal{T}[a, b]$ bezeichnen wir die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$.

11.2. *Bemerkung.* Sind $f, g \in \mathcal{T}[a, b]$ und $c \in \mathbb{R}$, so sind auch cf und $f + g$ in $\mathcal{T}[a, b]$. Daher ist $\mathcal{T}[a, b]$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums aller Abbildungen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$.

11.3. **Definition.** Ist $f \in \mathcal{T}[a,b]$, ist $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und f konstant auf (x_{k-1}, x_k) mit dem Wert c_k für $k = 1, \ldots, n$, so definiert man

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

11.4. *Bemerkung.* (a) Sind $f, g \in \mathcal{T}[a,b]$ und $c \in \mathbb{R}$, so gelten

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad \text{und} \quad \int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Daher ist

$$\mathcal{T}[a,b] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_a^b f(x)dx,$$

eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

(b) Sind $f, g \in \mathcal{T}[a,b]$ mit $f \le g$, also $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

11.5. **Definition.** Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann definieren wir *Ober-* und *Unterintegral* von f wie folgt:

$$\overset{b}{\underset{a}{\int^{*}}} f(x)dx = \inf\Big\{\int_a^b \psi(x)dx; \psi \in \mathcal{T}[a,b],\ \psi \ge f\Big\},$$

$$\overset{b}{\underset{a}{\int_{*}}} f(x)dx = \sup\Big\{\int_a^b \varphi(x)dx; \varphi \in \mathcal{T}[a,b],\ \varphi \le f\Big\}.$$

11.6. **Definition.** Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Sie heißt *Riemann-integrierbar,* wenn $\overset{b}{\underset{a}{\int^{*}}} f(x)dx = \overset{b}{\underset{a}{\int_{*}}} f(x)dx$. Den gemeinsamen Wert bezeichnet man mit $\int_a^b f(x)dx$ und nennt ihn das *(bestimmte) Integral* von f über $[a,b]$.

11.7. **Satz** (Riemann-Kriterium). *Für eine Funktion* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *sind gleichwertig:*

(a) f *ist Riemann-integrierbar.*

(b) *Zu jedem* $\epsilon > 0$ *gibt es Treppenfunktionen* $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$, *so dass* $\varphi \le f \le \psi$ *und*

$$\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))dx < \epsilon.$$

(c) *Es gibt Folgen* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathcal{T}[a,b]$, *so dass für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\varphi_n \le f \le \psi_n$ *und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))dx = 0.$$

Für je zwei Folgen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *wie in (c) gilt* $\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

11.8. *Beispiel.* Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, ist Riemann-integrierbar.

11.9. **Satz.** *Es seien* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar, und es sei* $c \in \mathbb{R}$. *Dann gelten*

(a) cf *ist Riemann-integrierbar mit* $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

(b) $f+g$ *ist Riemann-integrierbar mit* $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

11.10. **Bezeichnung.** Für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ definieren wir Funktionen $f_+, f_-\colon D \to \mathbb{R}$ durch

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geq 0,\\ 0, & \text{sonst,}\end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) \leq 0,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Dann gelten $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

11.11. **Satz.** *Für Riemann-integrierbare Funktionen* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *gelten:*

(a) f_+ *und* f_- *sind Riemann-integrierbar.*

(b) $|f|$ *ist Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq M(b-a),$$

wenn $M = \sup\{|f(x)|; a \leq x \leq b\}$.

(c) $\max(f,g)$ *und* $\min(f,g)$ *sind Riemann-integrierbar.*

11.12. **Satz.** *Für Riemann-integrierbare Funktionen* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *gelten:*

(a) f^2 *ist Riemann-integrierbar.*

(b) $f \cdot g$ *ist Riemann-integrierbar.*

Satz 11.12 macht keine Aussage über den Wert des Integrals.

11.13. **Bezeichnung.** Es sei $f\colon D \to W$ eine Abbildung. Es sei $E \subset D$. Die *Einschränkung* von f auf E ist diejenige Abbildung auf E, welche dieselbe Abbildungsvorschrift wie f besitzt. In Zeichen:

$$f|_E\colon E \to W, \quad x \mapsto f(x).$$

11.14. **Satz.** *Es seien* $a < b < c$ *und* $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ *eine Funktion.* f *ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn* $f|_{[a,b]}$ *und* $f_{[b,c]}$ *beide Riemann-integrierbar sind. In diesem Fall gilt*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

11.15. **Bezeichnung.** Man setzt $\int_a^a f(x)dx = 0$ und für $a < b$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

11.16. **Satz.** *Jede monotone Funktion* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *ist integrierbar.*

11.17. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sie heißt *gleichmäßig stetig,* wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in D$ mit $|x-y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

11.18. *Beispiel.* $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, ist nicht gleichmäßig stetig.

11.19. **Satz.** *Jede auf einem kompakten Intervall* $[a,b]$ *stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.*

11.20. **Satz.** *Jede stetige Funktion* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *ist Riemann-integrierbar.*

11.21. **Satz.** *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall, sei* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *stetig, und sei* $c \in I$. *Definiert man*

$$F\colon I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_c^x f(t)dt,$$

so ist F *differenzierbar mit* $F' = f$.

11.22. **Definition.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Interval, und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$. Eine differenzierbare Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* oder *unbestimmtes Integral* von f, wenn $F' = f$.

11.23. *Bemerkung.* (a) Ist F eine Stammfunktion zu f, so schreibt man $F(x) = \int f(x)dx$.
(b) Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich lediglich durch eine Konstante.

11.24. **Theorem** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall, sei* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *stetig und sei* F *eine Stammfunktion von* f. *Dann gilt für alle* $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

11.25. **Satz** (Partielle Integration). *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall, seien* $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ *differenzierbar und* f', g' *stetig. Dann*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

11.26. *Beispiel.* (a) $\int xe^x dx = e^x(x-1)$.
(b) $\int \log x dx = x\log x - x$.

11.27. **Satz** (Substitutionsregel). *Seien* $I, J \subset \mathbb{R}$ *offene Intervalle, sei* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *stetig und sei* $\varphi\colon J \to I$ *differenzierbar mit stetiger Ableitung. Dann gilt für* $a, b \in J$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

11.28. *Beispiel.* (a)
$$\int_a^b f(2t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{2a}^{2b} f(x)\,dx.$$

(b) (Logarithmisches Integral) Ist $\varphi\colon I \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung, so gilt
$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \log|\varphi(x)|.$$

(c) $\int \tan x\,dx = -\log|\cos x|$.

11.29. **Satz** (Partialbruchzerlegung). *Es seien* P *und* Q *komplexe Polynome. Das Polynom* Q *besitze eine Zerlegung in Linearfaktoren der Form* $Q(z) = \alpha\prod_{j=1}^{r}(z-z_j)^{m_j}$ *mit* $\alpha, z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$ *und* $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$. *Dann gibt es ein komplexes Polynom* T *und Zahlen* $c_{j,k} \in \mathbb{C}$, *so dass*
$$\frac{P(z)}{Q(z)} = T(z) + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{c_{j,k}}{(z-z_j)^k}.$$
Das Polynom T *und die Zahlen* $c_{j,k}$ *sind eindeutig bestimmt.*

11.30. *Bemerkung.* (a) Wenn Q ein reelles Polynom ist, dann gibt es zu jedem $z_j \notin \mathbb{R}$ ein z_m mit $z_m = \overline{z_j}$. Wenn dann auch noch P reell ist, dann $c_{m,k} = \overline{c_{j,k}}$. Man fasst dann wie folgt zusammen
$$\frac{c_{j,k}}{(z-z_j)^k} + \overline{\frac{c_{j,k}}{(z-z_j)^k}}.$$
Das ist eine reelle Funktion.

(b) In der Praxis bestimmt man T durch den euklidischen Algorithmus und anschließend die $c_{j,k}$ durch Koeffizientenvergleich.

(c) Auf diese Weise sind alle rationalen Funktionen integrierbar, wobei ich aber die benötigten Rekursionsformel nicht darstelle.

11.31. *Beispiel.* Bestimme die Stammfunktion von $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}$.
Zerlege $Q(z) = z^3 - 2z^2 + z$ in Linearfaktoren. $Q(z) = z(z-1)^2$. Ansatz
$$\begin{aligned}\frac{z^2+1}{z^3-2z^2+z} &= \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{(z-1)^2}\\ &= \frac{a(z-1)^2 + bz(z-1) + cz}{z(z-1)^2}\\ &= \frac{z^2(a+b) + z(-2a-b+c) + a}{z(z-1)^2}.\end{aligned}$$

Wir erhalten das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} a + b &= 1\\ -2a - b + c &= 0\\ a &= 1\end{aligned}$$

Die Lösung ist $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$. Also

$$\frac{z^2+1}{z^3-2z^2+z} = \frac{1}{z} + \frac{2}{(z-1)^2}.$$

Wir integrieren einzeln:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$$

Beim zweiten Integral substituieren wir $t = x - 1$.

$$\int \frac{2}{(x-1)^2} dx = \int 2t^{-2} dt = -2t^{-1} = -\frac{2}{x-1}.$$

Also

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x} = \log|x| - -\frac{2}{x-1}.$$

12. Gleichmässige Konvergenz von Funktionenfolgen

12.1. *Beispiel.* Für $n \in \mathbb{N}_0$ wird eine Funktion $J_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}.$$

Diese Funktion ist die *Bessel Funktion* zur Ordnung n.

12.2. **Definition.** Es sei D Menge. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Funktion $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ gegeben. Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in D$, so sagt man, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *punktweise* gegen f konvergiert.

12.3. **Definition.** Es sei D eine Menge und es seien $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und $f\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *gleichmäßig* gegen f, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $x \in D$ und alle $n \geq N$ gilt, dass $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Diese beiden Definitionen gelten genauso, wenn man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt.

12.4. *Beispiel.* Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise. Obwohl alle f_n stetig sind, ist die Grenzfunktion unstetig.

12.5. **Satz.** *Sei* $D \subset \mathbb{R}$ *und sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen* $f_n\colon D \to \mathbb{R}$*. Dann ist die Grenzfunktion stetig.*

Gilt auch für komplexes D *und/oder komplexe Zielmenge.*

12.6. **Satz.** *Für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiere gleichmäßig gegen* f*. Dann*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

12.7. **Satz.** *Für* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $f_n\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar und* $f_n'\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *sei stetig. Die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiere punktweise gegen die Funktion* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *und die Folge* $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *sei gleichmäßig konvergent. Dann ist* f *differenzierbar und*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \textit{für alle } x \in (a,b).$$

12.8. *Beispiel.* Definiere $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{n}\sin(nx)$. Dann konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Es gilt $f_n'(x) = \cos(nx)$. Diese Folge konvergiert noch nicht einmal punktweise, wie man durch Einsetzen von $x = \pi$ sieht.

12.9. **Definition.** Sei D eine Menge. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ die Partialsumme. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ heißt gleichmäßig konvergent, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert. Dieselbe Definition gilt auch für komplexwertige Funktionen.

12.10. **Korollar.** *Eine gleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen hat eine stetige Summe.*

12.11. **Satz.** *Sei* D *eine Menge. Für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *sei* $f_k\colon D \to \mathbb{R}$ *eine Funktion. Für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *gebe es ein* $a_k \geq 0$*, so dass* $|f_k(x)| \leq a_k$ *für alle* $x \in D$*. Falls* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert, so ist die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *gleichmäßig konvergent.*

12.12. **Definition.** Unter einer *komplexen Potenzreihe* verstehen wir eine Funktion der Form

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

wobei $a, c_0, c_1, \ldots$ feste komplexe Zahlen sind. Der Definitionsbereich dieser Funktion ist die Menge aller komplexen z, für die die Reihe konvergiert.

Beispiel.

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!2^{2j+n}} x^{2j+n}.$$

12.13. **Definition.** Für $a \in \mathbb{C}$ und $r \geq 0$ sei

$$B_r(a) = \{z \in \mathbb{C}; |z-a| < r\} \quad \text{und} \quad \overline{B}_r(a) = \{z \in \mathbb{C}; |z-a| \leq r\}.$$

Ferner sei $B_\infty(a) = \mathbb{C}$ und $\overline{B}_\infty(a) = \mathbb{C}$.

12.14. **Satz.** *Sei* $a \in \mathbb{C}$ *und sei* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine Folge in* $\mathbb{C}$*. Sei* $z_1 \in \mathbb{C}$ *so, dass die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1 - a)^n$ *konvergiert. Ist* $0 \leq \rho < |z_1 - a|$*, so konvergiert die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *absolut und gleichmäßig auf* $\overline{B}_\rho(a)$*.*

12.15. Definition. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe. Dann definiert man ihren *Konvergenzradius* als

$$r = \sup\Big\{|z-a|; \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \text{ ist konvergent}\Big\}.$$

Dabei sind $r = 0$ und $r = \infty$ zugelassen. Wegen des Satzes 12.14 ist $r = \infty$ gleichbedeutend damit, dass die Potenzreihe auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert.

Beispiel. Der Konvergenzradius der Besselfunktion J_n ist ∞. Eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n-j)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$ ist nämlich die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$, die gegen $\exp\left(\frac{x^2}{4}\right)$ konvergiert.

12.16. Satz. *Sei r der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Dann gelten:*

(a) *Die Potenzreihe konvergiert absolut auf $B_r(a)$.*
(b) *Ist $0 < \rho < r$, so konvergiert sie gleichmäßig auf $\overline{B}_\rho(a)$.*
(c) *Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(a)$ divergiert die Potenzreihe.*

12.17. Korollar. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Sie definiert auf $B_r(a)$ eine stetige Funktion.*

12.18. Satz. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe. Ist $c_n \neq 0$ für fast alle n und existiert $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, so ist r der Konvergenzradius der Potenzreihe.*

12.19. *Beispiel.* (a) Die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius ∞.
(b) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$. Sie hat daher den Konvergenzradius 1.
(c) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$ hat den Konvergenzradius 0.

12.20. Definition. Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ heißt *reell,* wenn a sowie alle c_n reell sind.

12.21. Satz. *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$.*

(a) *Auf $(a-r, a+r)$ ist die Funktion f beliebig oft differenzierbar und es gilt*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \quad \textit{falls } a - r < x < a + r.$$

(b) *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

12.22. Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte, reelle Folge. Für $N \in \mathbb{N}$ setze $b_N = \sup\{a_n; n \geq n\}$. Die Folge $(b_N)_{N\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und beschränkt, besitzt also einen Grenzwert ℓ. Man bezeichnet ℓ als den *Limes superior* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, i. Z.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sup_{n\geq N} a_n.$$

Analog bezeichnet man

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \inf_{n\geq N} a_n$$

als den *Limes inferior* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

12.23. *Bemerkung.* (a) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann stimmen $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$ überein.

(b) Wenn $a_n = (-1)^n b_n$ für eine konvergente Folge (b_n) mit $b = \lim_{n\to\infty} b_n > 0$, dann $\limsup_{n\to\infty} a_n = b$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -b$.

12.24. **Satz** (Hadamard). *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* r. *Dann*

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

12.25. *Beispiel.* (a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}(z-a)^n$ hat den Konvergenzradius 1.

(b) Die Exponenentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ hat bekanntlich den Konvergenzradius ∞. Also $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

(c) Betrachte

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^{4n}.$$

Dann

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[4n]{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4n}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}.$$

Der Konvergenzradius beträgt $\sqrt[4]{2}$.

12.26. *Beispiel.* Die Besselfunktion J_n erfüllt die Differentialgleichung

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

13. Taylor-Reihen

13.1. **Definition.** Sei I ein offenes Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $n \in \mathbb{N}$. Man sagt, f sei n*-mal stetig differenzierbar* oder *von der Klasse* C^n, wenn f n-mal differenzierbar und $f^{(n)}$ stetig ist. Wenn f stetig ist, sagt man, f sei von der Klasse C^0. Wenn f beliebig oft differenzierbar ist, sagt man, f sei von der Klasse C^{∞}. Man schreibt dann $f \in C^n(I)$ bzw. $f \in C^{\infty}(I)$.

13.2. **Satz** (Taylor-Formel). *Sei* I *ein offenes Intervall und* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *von der Klasse* C^{n+1} *für ein* $n \in \mathbb{N}_0$. *Sind* $a, x \in I$, *so gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x),$$

wobei

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

13.3. **Korollar** (Cauchysches Restglied). *Unter den Voraussetzungen von Satz 13.2 existiert ein ξ zwischen a und x, so dass*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)(x-\xi)^n.$$

13.4. **Korollar** (Restgliedformel von Lagrange). *Unter den Voraussetzungen von Satz 13.2 existiert ein ξ zwischen a und x, so dass*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

13.5. *Beispiel.* $f = \exp$, $a = 0$. Dann $f^{(n)}(a) = 1$ für alle n. Also

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x),$$

wobei

(a) (Cauchy-Restglied)

$$R_{n+1}(x) = \frac{\exp(\xi)}{n!}x(x-\xi)^n$$

für ein ξ zwischen 0 und x.

(b) (Lagrange-Restglied)

$$R_{n+1}(x) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

für ein (anderes) ξ zwischen 0 und x.

13.6. *Beispiel.* Bestimme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x(1-\cos x)}.$$

Wir brauchen die Taylorentwicklung des Sinus bis $n = 3$ und die des Cosinus bis $n = 2$.

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + R_4(x),$$

wo

$$R_4(x) = \frac{\sin\xi}{24}x^4,$$

und

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + S_3(x),$$

wo

$$S_3(x) = \frac{\sin\eta}{6}x^3.$$

Also

$$\frac{x-\sin(x)}{x(1-\cos x)} = \frac{\frac{1}{6}x^3 - \frac{\sin\xi}{24}x^4}{x(\frac{1}{2}x^2 - \frac{\sin\eta}{6}x^3)} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{\sin\xi}{24}x}{\frac{1}{2} - \frac{\sin\eta}{6}x} \to \frac{1}{3}$$

für $x \to 0$, denn $\sin\xi$ und $\sin\eta$ gehen beide gegen 0, wenn $x \to 0$.

13.7. **Definition.** Sei I ein offenes Intervall, sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sie heißt *reell-analytisch,* wenn es zu jedem $a \in I$ ein $r > 0$ und $c_0, c_1, \dots \in \mathbb{R}$ gibt mit $(a-r, a+r) \subset I$ und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad \text{für alle } x \in (a-r, a+r).$$

In diesem Fall bezeichnet man die Reihe als *Taylorreihe* von f im Punkt a.

13.8. *Bemerkung.* Jede reell-analytische Funktion ist von der Klasse C^∞, Es gibt aber Funktionen von der Klasse C^∞, die nicht reell-analytisch sind. Ein Beispiel ist

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x \le 0. \end{cases}$$

Gezeigt: Die angegebene Funktion f ist nicht Null, aber alle ihre Taylorpolynome sind Null.

13.9. **Satz.** *Für* $x \in (-1, 1)$ *gilt*

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

13.10. **Satz.** *Für* $-1 < x < 1$ *gilt*

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Bemerkung. Man kann zeigen, dass die Reihe auch für $x = \pm 1$ gegen $\arctan x$ konvergiert. Insbesondere gilt

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

Diese Formel liefert eine Methode, um π auszurechnen. Es ist aber vorzuziehen, die Formel $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ zu verwenden, und den Arcustangens in $\frac{1}{\sqrt{3}}$ zu entwickeln.

14. Uneigentliche Integrale

14.1. **Definition.** (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ für jedes $t \in (a, b)$ auf $[t, b]$ Riemann-integrierbar. Wenn $\lim_{t \searrow a} \int_t^b f(x)dx$ in $\mathbb{R}$ existiert, so schreibt man $\int_a^b f(x)dx$ für den Grenzwert und s gt, dass das *uneigentliche Integral* $\int_a^b f(x)dx$ konvergiert. Andernfalls sagt man, dass das uneigentliche Integral divergiert.

(b) Die Funktion $f\colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ sei für alle $t < b$ auf $[b, t]$ Riemann-integrierbar. Falls $\lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx$ existiert, so schreibt man $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ für den Grenzwert und sagt, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ konvergiert.

(c) In den Fällen (a) und (b) sagt man, das Integral sei uneigentlich im linken Endpunkt. Analog behandelt man Integrale, die uneigentlich im rechten Endpunkt sind.

(d) Ist das Integral uneigentlich in beiden Endpunkten, so wählt man ein c zwischen den Endpunkten und definiert

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

vorausgesetzt, beide Integrale existieren.

14.2. *Beispiel.* (a)

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = 1.$$

(b) Für $c \geq 1$ divergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^c}$ und für $c < 1$ konvergiert es. In diesem Fall gilt

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^c} = \frac{1}{1-c} \quad \text{falls } c < 1.$$

14.3. **Satz** (Cauchy-Kriterium). *Sei* $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ *für jedes* $t > a$ *auf* $[a,t]$ *Riemann-integrierbar. Genau dann konvergiert* $\int_a^\infty f(x)dx$*, wenn es zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $M > a$ *gibt, so dass*

$$\left|\int_s^t f(x)dx\right| < \epsilon \quad \textit{für alle } s,t \geq M.$$

Die Analoga für die anderen uneigentlichen Integrale gelten ebenfalls.

14.4. *Beispiel.* $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ konvergiert.

14.5. **Definition.** Sei $\int_a^b f(x)dx$ ein uneigentliches Integral. Man sagt, dass es *absolut konvergiert,* wenn $\int_a^b |f(x)|dx$ konvergiert.

14.6. **Satz.** *Sei* $\int_a^b f(x)dx$ *ein uneigentliches Integral. Wenn es absolut konvergiert, dann konvergiert es.*

14.7. *Beispiel.* Das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ konvergiert nicht absolut.

14.8. **Satz** (Majorantenkriterium). *Die Funktionen* $f, g\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ *seien für jedes* $b > a$ *auf* $[a,b]$ *Riemann-integrierbar, und es gelte* $|g(x)| \leq f(x)$ *für alle* $x \geq a$. *Wenn* $\int_a^\infty f(x)dx$ *konvergiert, dann konvergiert* $\int_a^\infty g(x)dx$ *absolut.*

Die Analoga für die anderen uneigentlichen Integrale gelten ebenfalls.

14.9. *Beispiel.* (a) Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)dx$ konvergiert absolut.

Wir werden in der Analysis III sehen, dass $\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$.

(b) Für jedes $x > 0$ konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

absolut.

14.10. **Satz** (Integralkriterium für Reihen). *Es sei* $f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *eine monoton fallenden Funktion mit* $f(x) \geq 0$ *für alle* $x \geq 1$. *Dann sind äquivalent:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *konvergiert.*

(b) $\int_1^\infty f(x) dx$ *konvergiert.*

14.11. *Beispiel.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert genau für $s > 1$. (Das hätten wir auch schon mit dem Cauchyschen Kondensationskriterium sehen können.)

14.12. **Definition.** Die *Gamma-Funktion* ist definiert durch

$$\Gamma\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Die Konvergenz dieses uneigentlichen Integrals hatten wir schon in Beispiel 14.9 gesehen. Mit partieller Integration beweist man:

14.13. **Satz.** *Für* $x > 0$ *gilt* $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

14.14. **Korollar.** *Für* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

14.15. *Bemerkung.* Den Graph der Gamma-Funktion zeigt Abbildung 2.

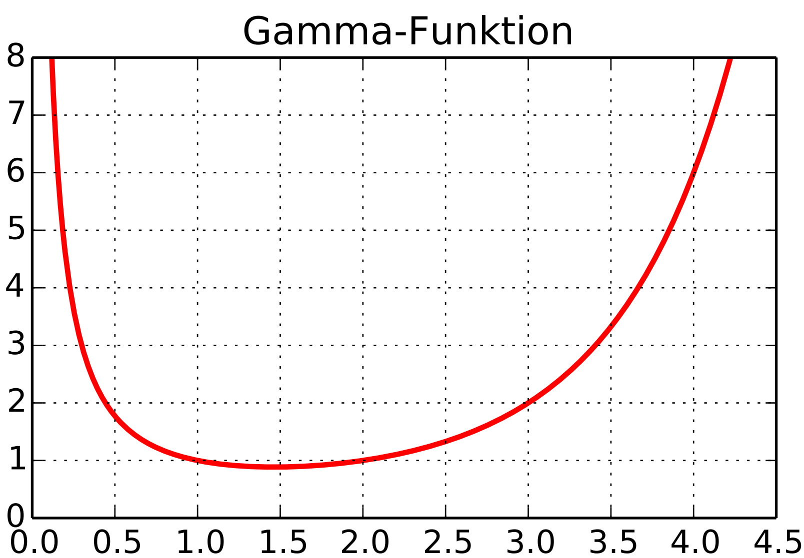

ABBILDUNG 2. Graph der Gamma-Funktion

15. Die Stirlingsche Formel

15.1. **Satz** (Wallissches Produkt).

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{4n^2}{4n^2-1}.$$

15.2. **Satz** (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Seien* $f, \varphi \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetige Funktionen mit* $\varphi \geq 0$. *Dann existiert* $\xi \in [a, b]$ *mit*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)dx.$$

15.3. **Satz** (Trapez-Regel). *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall mit* $[0, 1] \subset I$ *und sei* $f \in C^2(I)$. *Dann existiert ein* $\xi \in [0, 1]$, *so dass*

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) - \frac{1}{12}f''(\xi).$$

15.4. **Definition.** $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien zwei Folgen positiver Zahlen. Man sagt, sie seien *asymptotisch gleich,* wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

In diesem Fall schreibt man $a \sim b$.

15.5. **Satz** (Stirlingsche Formel).

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

15.6. *Bemerkung.* Man kann diesen Beweis noch etwas verfeinern und sieht dann für $n > 1$

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12(n-1)}\right).$$

Das wird beispielsweise im Buch von Forster vorgerechnet.