Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 05/06

Übungen zur Topologie

Blatt 5

Aufgabe 1. Sei X ein lokal zusammenhängender Raum, $p : E \to X$ eine Überlagerung, und $G \subset \mathrm{Aut}_X(E)$ eine Gruppe von X-Homöomorphismen. Zeigen Sie, daß die kanonischen Abbildungen $E \to E/G$ und $E/G \to X$ Überlagerungen sind.

Aufgabe 2. Seien E_1, E_2, X drei Kopien von $\mathbb{C}^\times$. Wir betrachten die Überlagerungen

$$p_1 : E_1 \longrightarrow X, \quad z \longmapsto z^{120} \quad \text{und} \quad p_2 : E_2 \longrightarrow X, \quad z \longmapsto z^{70}.$$

Sei $E = E_1 \times_X E_2$ das Faserprodukt und $p : E \to X$ die induzierte Überlagerung, welche (z_1, z_2) auf $z_1^{120} = z_2^{70}$ abbildet. Bestimmen Sie die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von E.

Tip: Wenden Sie den Faserfunktor Φ_1 an und betrachten sie statt der Überlagerungen lieber $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$-Mengen.

Aufgabe 3. Sei X ein zusammenhängender, lokal wegweise zusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender Raum, und $p : E \to X$ eine endliche Überlagerung mit E zusammenhängend. Zeigen Sie, daß es eine endliche Überlagerung $E' \to E$ gibt so, daß die Verkettung $p' : E' \to X$ eine Galois-Überlagerung ist.

Aufgabe 4. Sei $X \subset \mathbb{C}$ das Komplement der Teilmenge $\{2^{-n} \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Verifizieren Sie, daß X nicht semilokal einfach zusammenhängend ist, und beweisen Sie, daß der Faserfunktor

$$\Phi_0 : (\mathsf{Cov}/X) \longrightarrow (\pi_1(X,0) - \mathsf{Set}), \quad E \longmapsto E_0$$

nicht essentiell surjektiv ist.

Tip: Zeigen Sie, daß für jede Überlagerung $p : E \to X$ die Wirkung der Fundamentalgruppe $\pi_1(X,0)$ auf der Faser E_0 nicht treu ist.

Abgabe: Bis Montag, den 28.11. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.