Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 05/06

Übungen zur Topologie

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei G eine topologische Gruppe und $e \in G$ ihr neutrales Element.

(i) Beweisen Sie, daß die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, e)$ abelsch sein muß.

(ii) Zeigen Sie weiterhin, daß die Verknüpfung $w * v$ von zwei Schleifen in G an e homotop zur Schleife $s \mapsto w(s)v(s)$ ist, die durch Verwendung der Gruppenmultiplikation entsteht.

Tip: Betrachten Sie die stetige Abbildung

$$[0,1] \times [0,1] \longrightarrow G, \quad (r,s) \longmapsto w(r)v(s).$$

und wandern Sie gewisse Wege und Schleifen im einfach zusammenhängendem Raum $[0,1] \times [0,1]$ ab.

Aufgabe 2. Sei X ein wegweise zusammenhängender topologischer Raum. Zu jedem Punkt $a \in X$ sei

$$\Phi_a : (\mathsf{Cov}/X) \longrightarrow (\pi_1(X,a) - \mathsf{Set}), \quad E \longmapsto E_a$$

der Faserfunktor von der Kategorie der Überlagerungen $E \to X$ in die Kategorie der $\pi_1(X,a)$-Rechtsmengen. Angenommen, der Faserfunktor Φ_a ist eine Äquivalenz von Kategorien für einen Punkt $a \in X$. Zeigen Sie, daß dann die Faserfunktoren Φ_b für alle Punkte $b \in X$ Äquivalenzen sind.

Tip: Schreiben Sie Φ_b als Komposition von Φ_a und einer Äquivalenz von der Kategorie der $\pi_1(X,a)$-Rechtsmengen in die Kategorie der $\pi_1(X,b)$-Rechtsmengen. Letzteres können Sie mit einem Weg von a nach b konstruieren.

Aufgabe 3. Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl, und $E \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die Einheitsmatrix. Zeigen Sie, daß der Homomorphismus

$$\pi_1(\det) : \pi_1(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), E) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$$

bijektiv ist. Folglich ist die Fundamentalgruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine freie abelsche Gruppe vom Rang eins.

Aufgabe 4. Wir betrachten die folgende Schleife $w : [0,1] \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ an der Einheitsmatrix E:

$$w(s) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi s) & -\sin(2\pi s) & 0 \\ \sin(2\pi s) & \cos(2\pi s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0,1].$$

Zeigen Sie, daß die Schleife w homotop zur inversen Schleife w^{-1} ist. Mit anderen Worten: Es gilt $2[w] = 0$ in der Fundamentalgruppe. Tip: Homotopieren Sie die Rotationsachse von $w(s)$ „auf den Kopf".

Bemerkung: Man kann zeigen, daß die Fundamentalgruppe von $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ zyklisch von Ordnung zwei ist und von der Schleife $[w]$ erzeugt wird. Analoges gilt für alle $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$. Die universellen Überlagerungen dieser orthogonalen Gruppen sind die sogenannten *Spin-Gruppen.*

Abgabe: Bis Montag, den 21.11. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.