Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 05/06

Übungen zur Topologie

Blatt 2

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß die Teilraum $U(n) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ der unitären Matrizen kompakt und zusammenhängend ist.

Aufgabe 2. Sei G eine topologische Gruppe. Wir bezeichnen das neutrale Element mit $e \in G$. Zeigen Sie, daß der topologische Raum G genau dann separiert ist, wenn die Teilmenge $\{e\} \subset G$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 3. Unter einem *Cantor-Raum* versteht man den Produktraum der Form $X = \prod_{n=1}^{\infty} \{0, 2\}$. Dabei sind die Faktoren 2-elementig und mit der diskreten Topologie versehen.

Unter der *Cantor-Menge* $C \subset \mathbb{R}$ versteht man den Teilraum aller reellen Zahlen $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ der Form $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$ mit allen Ziffern $a_n \in \{0, 2\}$. Beachten Sie dabei, daß triadische Entwicklungen nicht ganz eindeutig sind: Beispielsweise gehört $1/3 = \sum_{n \geq 2} 2/3^n$ zur Cantor-Menge.

(i) Verifizieren Sie, daß der Cantor-Raum X quasikompakt und die Cantor-Menge C separiert ist.

(ii) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$f : X \longrightarrow C, \quad (a_n) \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$$

ein Homöomorphismus von topologischen Räumen ist.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring. Sein *Spektrum* $\operatorname{Spec}(R)$ ist die Menge aller Primideale $\mathfrak{p} \subset R$. Ist $I \subset R$ eine beliebiges Ideal, so bezeichnet man mit $V(I) \subset \operatorname{Spec}(R)$ die Teilmenge aller Primideale mit $I \subset \mathfrak{p}$.

(i) Zeigen Sie die Formeln

$$V(\sum I_\lambda) = \bigcap V(I_\lambda) \quad \text{und} \quad V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1) \cup V(I_2).$$

Folgern Sie, daß die Teilmengen $V(I) \subset \operatorname{Spec}(R)$ die abgeschlossenen Mengen einer Topologie sind. Man bezeichnet diese Topologie als die *Zariski-Topologie.*

(ii) Skizzieren Sie den toplogischen Raum $X = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ mit seinen offenen Mengen. Verifizieren Sie, daß er nicht separiert ist.

(iii) Beweisen Sie, daß der topologische Raum $\operatorname{Spec}(R)$ quasikompakt ist. Tip: Jedes Ideal $I \neq R$ ist in einem maximalen Ideal enthalten.

Bemerkung: Unter einem Ring verstehen wir immer einen Ring, der kommutativ ist und ein Einselement besitzt. In der *Algebraischen Geometrie* geht es um topologische Räume mit gewissen Zusatzstrukturen, die lokal so aussehen wie das Spektrum eines Ringes. So ein Objekte heißt dann *Schema.*

Abgabe: Bis Montag, den 7.11. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Sprechzeiten:
Prof. Dr. Stefan Schröer mittwochs um 16-17 Uhr ct in 25.13.03.37
Dr. Christian Liedtke donnerstags um 13 - 14 Uhr ct in 25.13.03.33
Christian Löffelsend montags um 13-14 Uhr ct in 25.13.00.22.2