Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 05/06

Übungen zur Topologie

Blatt 1

Aufgabe 1. Finden Sie alle Topologien $\mathfrak{T}$ auf der zweielementigen Menge $A = \{a, b\}$ sowie auf der dreielementigen Menge $X = \{x, y, z\}$.

Aufgabe 2. Im Folgenden seien die Matrizenmengen $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ und $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ stets mit der üblichen Topologie versehen.

(i) Zeigen Sie, daß die Teilmenge $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ zusammenhängend ist.

(ii) Beweisen Sie, daß die Teilmenge $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ aus genau zwei Zusammenhangskomponenten besteht, nämlich

$$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\},$$
$$\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) < 0\}.$$

Tip: Erinnern Sie sich daran, daß die spezielle lineare Gruppe von gewissen Elementarmatrizen erzeugt wird.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe, und $U_\alpha \subset G$, $\alpha \in I$ eine Familie von normalen Untergruppen. Sei $\mathfrak{T}$ die Topologie auf G, die von den Teilmengen der Form $gU_\alpha = \{gh \mid h \in U_\alpha\}$ mit $g \in G$ und $\alpha \in I$ erzeugt wird. Zeigen Sie, daß die beiden Abbildungen

$$\mu : G \times G \longrightarrow G, \quad (a, b) \longmapsto ab \quad \text{und} \quad \iota : G \to G, \quad a \longmapsto a^{-1}$$

stetig sind.

Bemerkung: Eine Menge G, auf der eine Gruppenstruktur und eine Topologie gegeben ist, für welche die Multiplikationsabbildung μ und die Inversenabbildung ι stetig sind, bezeichnet man als *topologische Gruppe*.

Aufgabe 4. Wir definieren zwei Unterräume $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^2$ durch

$$X_1 = \{(0,b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \neq 0\}$$
$$X_2 = \{(1/2^n, b) \in \mathbb{R}^2 \mid n \geq 0 \text{ ganze Zahl}\}.$$

Sein nun $X = X_1 \cup X_2$, und R die Äquivalenzrelation auf X, deren Äquivalenzklassen die Zusammenhangskomponenten sind. Bestimmen Sie die Zusammenhangskomponenten von X, beschreiben Sie die Topologie auf dem Raum der Zusammenhangskomponenten X/R, und verifizieren Sie, daß X/R nicht separiert ist.

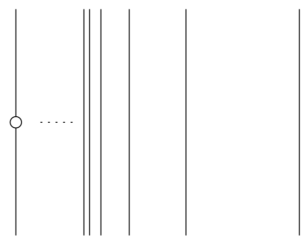

Fig. 1 Der Unterraum $X \subset \mathbb{R}^2$.

Abgabe: Bis Montag, den 31.10. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Übungsgruppentermin: Verschoben auf donnerstags, 11 - 13 Uhr ct, Seminarraum 25.22.02.81.

Punktevergabe: Pro Aufgabe können Sie 5 Punkte erhalten. Es wird 12 Übungszettel geben, jeweils mit 4 Aufgaben. Um zur Klausur und Nachklausur zugelassen zu werden, müssen Sie 40 % = 96 Punkte erreichen, und einmal in der Übungsgruppe vorrechnen.

Klausurtermin: Montag, der 6.2.06 von 9–11 Uhr im Hörsaal 5E.

Nachklausur: Voraussichtlich in der ersten Vorlesungswoche des SS06.