Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
APL. PROF. DR. AXEL
GRÜNROCK

Lösung und Wertung

WS 2021/22
29.03.2022

2. Klausur zu Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Bitte die nächsten beiden Zeilen unbedingt ausfüllen!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (außer Stift und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Einfache Gleichungen und Ungleichungen)	8 Punkte
A3 (Übergangsmatrix)	7 Punkte
A4 (Skalarprodukte im $\mathbb{R}^3$)	6 Punkte
A5 (Matrixprodukte und Determinanten)	8 Punkte
A6 (Eigenwerte und -räume)	11 Punkte
A7 (Matrixinversion mit dem Gauss-Algorithmus)	11 Punkte

In Aufgabe 1 sollen Sie entscheiden, ob die vorgelegten mathematischen Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie dies bitte in den dafür vorgesehenen Kreisen auf Seite 3 an. Bei den Aufgaben 2 bis 6 werden lediglich die Ergebnisse korrigiert. Es empfiehlt sich also im besonderen Maße, **Rechen- und Übertragungsfehler zu vermeiden. Tragen Sie Ihre Ergebnisse zu diesen Aufgaben bitte auf S. 2 ein. Diese Einträge sind maßgeblich für die Korrektur!** Bei Aufgabe 7 wird auch der Rechenweg bewertet. Die Klausur gilt mit 24 (von 61 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2-6	7	Σ	Note
Punkte/Note					

Lös. Aufg. 2 (a) $\mathbb{L} = \{-5, 3\}$ (b) $\mathbb{L} = \{4, 9\}$ /2+2P.

(c) $\mathbb{L} = (-1, 0) \cup (0, 1)$ (d) $\mathbb{L} = [\frac{1}{e}, e]$ /2+2P.

Lös. Aufg. 3 (a) $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ /2P.

(b) Anteil der Käufer von $P_2 = \frac{21}{32}$ /5P.

Lös. Aufg. 4 (a) $|x|^2 = 13$ $|y|^2 = 10$ / 2P.

(b) $\langle x, z\rangle = 8$ $\langle y, z\rangle = 6$ / 2P.

(c) $\langle x + y, x - y\rangle = 3$ $\langle z, x + y\rangle = 14$ / 2P.

Lös. Aufg. 5 $AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ / 2P.

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 \\ -1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ / 3P.

$\det(AB) = -6$ $\det(BA) = 0$ /1+2P.

Lös. Aufg. 6 (a) $P_A(\lambda) = (6-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4)$ (vgl. [illegible]) / 2P.

(b) $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 4$ $\lambda_3 = 6$ / 3P.

(c) $E_{\lambda_1} = \{ (-t, 0, t)^T : t \in \mathbb{R} \}$ / 2P.

$E_{\lambda_2} = \{ (2t, -5t, t)^T : t \in \mathbb{R} \}$ / 2P.

$E_{\lambda_3} = \{ (0, t, 0)^T : t \in \mathbb{R} \}$ / 2P.

$\Sigma =$

1. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen stets richtig, und welche im allgemeinen falsch sind. (Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!)

   (a) Der Kern einer linearen Abbildung $F: V \to W$ ist ein Untervektorraum von W.
   Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (b) Das Bild einer linearen Abbildung $F: V \to W$ ist ein Untervektorraum von V.
   Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (c) Der Durchschnitt zweier Untervektorräume U_1, U_2 eines Vektorraums V ist ein Untervektorraum von V.
   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (d) Die Vereinigung zweier Untervektorräume U_1, U_2 eines Vektorraums V ist ein Untervektorraum von V.
   Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (e) Das orthogonale Komplement $U^\perp = \{x \in V : \langle x, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$ eines Untervektorraums U eines euklidischen Vektorraums V ist ein Untervektorraum.
   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

2. **(2+2+2+2 P.)** Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der nachstehenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

(a) $x^2 + 2x - 15 = 0$,

$$x_{1,2} \in \{-1 \pm \sqrt{1+15}\} = \{-5, 3\} = \mathbb{L}$$

(b) $2\ln(x) = \ln(13x - 36)$, $\iff \ln(x^2) = \ln(13x - 36)$

$\iff x^2 - 13x + 36 = 0 \iff (x-4)(x-9) = 0$

$\iff x \in \{4, 9\} = \mathbb{L}$

(Beide Seiten der ursprünglichen Gleichung sind hierfür definiert!)

(c) $x^2 < |x|$, $\mathbb{L} = (-1, 0) \cup (0, 1)$

(d) $|\ln(x)| \leq 1$. $\mathbb{L} = [\frac{1}{e}, e]$

3. **(2+5 P.)** Zwei Unternehmen stellen vergleichbare Produkte P_1 und P_2 her, die bei Markteinführung im Jahr 2020 von gleich vielen Kunden gekauft wurden. Jährlich wechseln 1/3 der Käufer von P_1 zu P_2, umgekehrt nur 1/6. Die Gesamtzahl der Kunden bleibt gleich.

   (a) Geben Sie die Übergangsmatrix P an, die die jährliche Kundenwanderung beschreibt.

   (b) Wie groß ist der Anteil der Käufer von P_2 im Jahr 2024 ?

(a) Es ist $P = (p_{ij})$ mit p_{ij} = Anteil der Käufer, die von ⓙ nach ⓘ wechseln. Konkret also

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$ 2P.

(b) Man berechnet $P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ und

$$P^4 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{8} & \frac{11}{16} \end{pmatrix}$$ sowie $\frac{1}{2} P^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{11}{16} \\ \frac{21}{16} \end{pmatrix}$

Also ist der gesuchte Anteil $= \frac{21}{32}$

(vgl. Aufg. 3 von Blatt 10 !)

4. **(2+2+2 P.)** Für die Vektoren $x = (2,3,0)^\top, y = (3,0,1)^\top$ und $z = (1,2,3)^\top$ berechne man

(a) $|x|^2$ und $|y|^2$,

$|x|^2 = 4 + 9 + 0 = 13$

$|y|^2 = 9 + 0 + 1 = 10$

(b) $\langle x, z\rangle$ und $\langle y, z\rangle$,

$\langle x, z \rangle = 2 + 6 + 0 = 8$

$\langle y, z \rangle = 3 + 0 + 3 = 6$

(c) $\langle x + y, x - y\rangle$ und $\langle z, x + y\rangle$.

$\langle x + y, x - y \rangle = |x|^2 - |y|^2 = 3$

$\langle z, x + y \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = 8 + 6 = 14$

Vergessen Sie nicht, Ihre Ergebnisse auf S. 2 einzutragen!

5. **(8 P.)** Berechnen Sie die Matrixprodukte AB und BA sowie deren Determinanten für die nachstehenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad 2P.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 \\ -1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad 3P.$$

(Für jeden falschen Eintrag: −1 P., keine Negativen bei einem Aufgabenteil)

$$\det(AB) = 4 - 10 = -6 \qquad 1P.$$

$$\det(BA) = -4 + 54 - 44 - 6 = 0 \qquad 2P.$$

6. **(2+3+6 P.)** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $P_A(\lambda)$ von A,

(b) alle Eigenwerte dieser Matrix sowie

(c) die zugehörigen Eigenräume.

z. B. Sarrus

$$(a)\ P_A(\lambda) = \det(A-\lambda E_3) = \underbrace{(3-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda) - 2(6-\lambda)}_{\text{bereits das ist ok für (a)}}$$

$$= (6-\lambda)\big((\lambda-3)(\lambda-2)-2\big) = (6-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4) = \ldots \qquad 2P.$$

$$3P.$$

$$(b)\ \ldots = (6-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-1) \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 6$$

(für jeden richtigen 1P.)

$$(c)\ (A-\overset{\overset{1}{\shortparallel}}{\lambda_1}E_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x+z=0 \\ \wedge\ y=0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow E_{\lambda_1} = \{(-t,0,t)^T : t \in \mathbb{R}\} \qquad 2P.$$

$$(A-\overset{\overset{4}{\shortparallel}}{\lambda_2}E_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 2z \\ \wedge\ \underline{5x+2y=0} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{5x}{2} = -5z$$

$$\Rightarrow E_{\lambda_2} = \{(2t,-5t,t)^T : t \in \mathbb{R}\} \qquad 2P.$$

$$(A-\overset{\overset{6}{\shortparallel}}{\lambda_3}E_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y \in \mathbb{R} \text{ bel.} \wedge \left\{ \begin{matrix} 3x = 2z \\ x = 4z \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow x = z = 0 \Rightarrow E_{\lambda_3} = \{(0,t,0)^T : t \in \mathbb{R}\} \qquad 2P.$$

Vergessen Sie nicht, Ihre Ergebnisse auf S. 2 einzutragen!

7. **(4+1+6 P.)** Gegeben sei die 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Bringen Sie diese Matrix durch Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform. Führen Sie simultan dieselben Zeilenoperationen an der Einheitsmatrix E_3 durch. Geben Sie die von Ihnen durchgeführten Zeilenoperationen explizit (in Kurznotation) an.

(b) Bestimmen Sie $\det(A)$.

(c) Berechnen Sie A^{-1} mit Hilfe weiterer Zeilenoperationen (auch diese bitte angeben).

(a) $2 \to 2 - 1$ überführt $(A \mid E)$ in
1P.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftarrow 1P.$$

$3 \to 3 - 2$ ← 1P.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \leftarrow 1P.$$

(b) An dieser Stelle kann man $\det A = 1$ ablesen. 1P.

(c) $2 \to 2 + 3 \cdot 3$ (1P.) $1 \to 1 - 2 \cdot 3$ (1P)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow 1P. \\ \leftarrow 1P. \\ \end{array}$$

$1 \to 1 - 2$ (1P.)

$$\left(\begin{array}{c|c} E_3 & \underbrace{\begin{matrix} -3 & 4 & -5 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}}_{= A^{-1}} \end{array}\right) \leftarrow 1P.$$