Lösung und Wertung

Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
APL. PROF. DR. AXEL
GRÜNROCK

WS 2018/19
29.03.2019

# 2. Klausur zu Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

**Allgemeine Hinweise:** Als Hilfsmittel ist (außer Stift und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

| | |
|---|---|
| A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen) | 10 Punkte |
| A2 (Skalarprodukt) | 7 Punkte |
| A3 (Einfache Gleichungen und Ungleichungen) | 10 Punkte |
| A4 (Endliche Summen) | 6 Punkte |
| A5 (Inverse einer Dreiecksmatrix) | 8 Punkte |
| A6 (Übergangsmatrizen) | 9 Punkte |
| A7 (Eigenwerte und -räume) | 10 Punkte |

Bei den Aufgaben 1,2 (a), 2 (b), 3, und 4 werden lediglich die (Teil-)Ergebnisse korrigiert. Es empfiehlt sich also im besonderen Maße, **Rechen- und Übertragungsfehler** zu **vermeiden**. Die Klausur gilt mit 24 (von 60 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

1. Im Folgenden sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n \geq 2$ eine stochastische Matrix. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen stets richtig, und welche im allgemeinen falsch sind. (Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!)

   (a) Alle Zeilensummen von $P$ sind $= 1$.
   Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (b) Die Determinante von $P$ ist stets von Null verschieden.
   Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (c) $P$ besitzt stets einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$.
   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (d) Alle Spaltensummen von $P$ sind $= 1$.
   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (e) $P^2$ ist ebenfalls eine stochastische Matrix.
   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

Erläuterung zu (c): $P - E_n$ ist aufgrund der in (d) gefragten definierenden Eigenschaft eine Matrix, deren Spaltensummen alle gleich 0 sind. Addiert man die Zeilen (1) bis (n−1) zur letzten hinzu – dies ist eine Zeilenoperation, die die Determinante nicht verändert – so entsteht eine Zeile (n) mit lauter Nullen. Also $\det(P - E_n) = 0$.

(*) Alt: $\langle x,x\rangle \geq 0$ mit Gleichheit nur für $x=0$.

2. **(4+1+2=7 P.)**

(a) Geben Sie die Definition eines Skalarproduktes $\langle\ ,\ \rangle$ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V$ an.

Eine Abbildung $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ 1P.

heißt ein Skalarprodukt, wenn für alle $x,y,z \in V$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$

(S1) $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle$ 1P.

(S2) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ 1P

(S3) $\langle x,x\rangle > 0 \quad \forall x \in V \setminus \{0\}$ (*) 1P

gelten.

(b) Wie wird mit Hilfe eines Skalarproduktes die euklidische Norm $|\ | : V \to [0,\infty)$, $x \mapsto |x|$ definiert?

$$|x| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$ 1P.

(c) Leiten Sie aus den definierenden Eigenschaften die folgenden Rechenregeln her:

(i) $\langle x+y, x-y\rangle = |x|^2 - |y|^2$,

$$\langle x+y, x-y\rangle \underset{(S1)}{=} \langle x,x-y\rangle + \langle y,x-y\rangle \underset{(S2)}{=} \langle x-y,x\rangle + \langle x-y,y\rangle$$

$$\underset{(S1)}{=} \langle x,x\rangle - \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle - \langle y,y\rangle \underset{(S2)}{=} \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle \underset{(b)}{=} |x|^2 - |y|^2$$

1P.

(ii) $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$.

Wie in (i) sieht man $|x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = |x|^2 + 2\langle x,y\rangle + |y|^2$

mit $-y$ statt $y$ (beachte (S2)!) $|x-y|^2 = |x|^2 - 2\langle x,y\rangle + |y|^2$

Addition ergibt die Beh. 1P.

3. **(3+2+1+4 = 10 P.)** Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der nachstehenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

(a) $|x|^3 x - 27x = 0$,

$\iff x = 0$ oder $|x|^3 = 27$

$\iff x = 0$ oder $|x| = 3 \iff x \in \{-3, 0, 3\}$

(Für jede richtige Lösung 1P.)

(b) $e^{x^2} = e^{2x+3}$,

$\iff x^2 = 2x + 3 \iff 0 = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$

$\iff x \in \{-1, 3\}$

(Für jede richtige Lösung 1P.)

(c) $2x^2 - 8x + 8 \leq 0$,

$\iff x^2 - 4x + 4 \leq 0 \iff (x-2)^2 \leq 0 \iff x - 2 = 0$

$\iff x = 2$ (einzige Lösung) 1P.

(d) $(x^2 - 10)^2 \leq 36$. $\iff |x^2 - 10| \leq 6 \iff -6 \leq x^2 - 10 \leq 6$

$\iff 4 \leq x^2 \leq 16 \iff 2 \leq x \leq 4$ oder $-4 \leq x \leq -2$

Also: $\mathbb{L} = [-4, -2] \cup [2, 4]$

(und für jedes richtige Teilintervall gibt's 2 P.)

4. **(3+3 P.)**

(a) Geben Sie den binomischen Lehrsatz an

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

1P.

und berechnen Sie $\sum_{k=2}^{9} \binom{9}{k}$.

$$= \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} - \binom{9}{1} - \binom{9}{0}$$

Jetzt: Lehrsatz mit $a = b = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{0} =$

$$= 2^9 - 9 - 1 = 512 - 10 = \underline{\underline{502}}$$

2P.

(b) Geben Sie die arithmetische Summenformel (= Formel für $\sum_{k=1}^{n} k$) an

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$$

1P.

und bestimmen Sie $\sum_{k=21}^{50} (k-35)$.

$$= \sum_{k=1}^{30} (k-15) = \sum_{k=1}^{30} k - 15 \cdot 30$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 - 15 \cdot 30 = \underline{\underline{15}}$$

2P.

5. **(8 P.)** Invertieren Sie die rechte obere Dreiecksmatrix

$$R := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des (erweiterten) Gauss-Algorithmus. Geben Sie die von Ihnen verwendeten Zeilenoperationen (in Kurzschreibweise) explizit an!

Man startet mit

$$(R \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(wofür es noch keinen Punkt gibt!)

$② \to ② - 4 \cdot ③$ 1P

$① \to ① - 6 \cdot ③$ 1P

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow 1P. \\ \leftarrow 1P. \\ \end{array}$$

Normierung

$② \to \frac{1}{2} \cdot ②$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1P.

$① \to ① - 4 ②$ 1P.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftarrow 1P.$$

Und schließlich erhält man aus $① \to \frac{1}{2} \cdot ①$ das Ergebnis

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1P.

6. **(3+3+3 = 9 P.)** Drei Unternehmen stellen vergleichbare Produkte $P_1$, $P_2$ und $P_3$ her. Bei Markteinführung wird $P_1$ von 100, $P_2$ von 170 und $P_3$ von 90 Kunden gekauft. Im darauffolgenden Jahr wechseln $\frac{1}{4}$ der Käufer von $P_1$ zu $P_2$, $\frac{1}{4}$ von $P_1$ zu $P_3$, $\frac{1}{3}$ von $P_3$ zu $P_1$ und $\frac{1}{6}$ von $P_3$ zu $P_2$, während alle Kunden von $P_2$ diesem Produkt treu bleiben. Die Gesamtzahl aller Kunden bleibt gleich. Bestimmen Sie:
   (a) die Übergangsmatrix $P$ für die beschriebene Kundenwanderung,
   (b) die Marktverteilungsvektoren zu Beginn und nach einem Jahr,
   (c) einen Eigenvektor von $P$ zum Eigenwert $\lambda = 1$. (Das ist ein Marktverteilungsvektor, der unter der beschriebenen Käuferwanderung unverändert bleibt.)

(a) $$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ Für jede richtige Spalte gibt's 1P.

(b) Zu Beginn: $$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 100 \\ 170 \\ 90 \end{pmatrix}$$ 1P.

Nach einem Jahr:

$$x^{(1)} = P x^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 170 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 210 \\ 70 \end{pmatrix}$$ 2P.

(c) Zu lösen ist das lineare GLS:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

② → ② + $\frac{1}{2}$ · ① und ③ → ③ + $\frac{1}{2}$ · ① führt auf die

erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

wobei nach ③ → ③ + ② die letzte Zeile durch eine Null-

zeile ersetzt werden kann.

Zeile ② ergibt jetzt $z=0$, dann erhält man aus

Zeile ①, dass auch $x=0$. $y \in \mathbb{R}$ ist beliebig, also

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R} \right\}$$

(Für einen Marktverteilungsvektor sollte $y > 0$ gewählt

werden, z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.)

Das Ergebnis kann man aus der Formulierung

"... während alle Kunden von $P_2$ ... treu bleiben."

auch erraten, was dann ebenfalls die 3 P. für

diesen Aufgabenteil gibt.

7. **(2+3+5 = 10 P.)** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $P_A(\lambda)$ von $A$,

(b) alle Eigenwerte dieser Matrix sowie

(c) die zugehörigen Eigenräume.

(a) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3)$ 1P. für Kenntnis der Def.

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

1P.

z.B. Sarrus $= \lambda^2(1-\lambda) - 4(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2)$

(b) $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -2$ (Jeder richtige EW: 1P.)

(c) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R} \right\}$ ist unmittelbar abzulesen. 1P.

Zur Bestimmung von $E_2$ ist das LGS

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen, also

$y = 0, \quad -2x + 2z = 0$, d.h. $x = z$ und damit

$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R} \right\}$ 2P.

Ebenso: $E_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R} \right\}$ 2P.