Lösung u. Wertung

Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel
Grünrock

WS 2017/18
28.03.2018

2. Klausur zu Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (außer Stift und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Mittelwerte)	6 Punkte
A3 (Einfache Rechenaufgaben)	11 Punkte
A4 (Matrizenmultiplikation)	10 Punkte
A5 (Ein lineares Gleichungssystem)	10 Punkte
A6 (Eine stochastische 2×2 - Matrix)	13 Punkte

Bei den Aufgaben 1,2,3 und 4 werden lediglich die (Teil-)Ergebnisse korrigiert. Es empfiehlt sich also im besonderen Maße, Rechen- und Übertragungsfehler zu vermeiden. Die Klausur gilt mit 24 (von 60 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

1. Im folgenden sei stets $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \geq 2$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen für alle derartigen Matrizen richtig oder falsch sind. oder nicht Hier sind nur die Antworten “richtig”, ”falsch“ oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Besitzt A den Eigenwert $\lambda = 0$, so ist A nicht invertierbar.

   Antwort: richtig ☒ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (b) Ist A invertierbar und $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von A, so ist $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1}.

   Antwort: richtig ☒ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (c) Sind $x, y \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektoren von A zum selben Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind auch $x + y \in \mathbb{R}^n$ und $x - y \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektoren zu diesem Eigenwert.

   Antwort: richtig ☒ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (d) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A und $N \in \mathbb{N}$, so ist λ^N ein Eigenwert von A^N.

   Antwort: richtig ☒ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (e) Ist $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, und $\lambda > 0$ ein Eigenwert von A^N, so ist $\sqrt[N]{\lambda}$ ein Eigenwert von A.

   Antwort: richtig ○ falsch ☒ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

Bsp. zu (e): $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert von A^2, aber $\sqrt{\lambda} = 1$ ist kein Eigenwert von A.

2. (3+3 P.)

(a) Geben Sie die Definitionen der Begriffe

(i) geometrisches Mittel: $GM(x_1, \dots, x_n)$;

$$GM(x_1,\dots,x_n) = \left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{\frac{1}{n}} \quad \left(= \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}\right)$$ 1P.

(ii) harmonisches Mittel: $HM(x_1, \dots, x_n)$;

$$HM(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j}} \quad \left(= \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}}\right)$$ 1P.

(iii) arithmetisches Mittel: $AM(x_1, \dots, x_n)$;

$$AM(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \quad \left(= \frac{1}{n}(x_1+\dots+x_n)\right)$$ 1P.

für positive reelle Zahlen $x_1, \dots, x_n$ an und

(b) berechnen Sie diese Mittelwerte für $x_1 = 3$, $x_2 = 9$ und $x_3 = 27$. (Hinweis: $GM(x_1, x_2, x_3)$ und $AM(x_1, x_2, x_3)$ sind hier ganzzahlig, $HM(x_1, x_2, x_3)$ ist als gekürzter Bruch anzugeben.)

$$GM(3,9,27) = \left(3^{1+2+3}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^2 = \underline{\underline{9}}$$ 1P.

$$HM(3,9,27) = \frac{3}{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}} = \frac{81}{9+3+1} = \underline{\underline{\frac{81}{13}}}$$ 1P.

$$AM(3,9,27) = \frac{1}{3}(3+9+27) = 1+3+9 = \underline{\underline{13}}$$ 1P.

3. **(2+2+2+2+3 P.)** Berechnen Sie:

(a) $\sum_{k=11}^{99} k$, $= \sum_{k=1}^{99} k - \sum_{k=1}^{10} k = \frac{1}{2}\left(99 \cdot 100 - 11 \cdot 10 \right)$

$= \frac{1}{2} (9900 - 110) = 4950 - 55 = \underline{\underline{4895}}$ 2P.

(Wer $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ kennt, erhält 1P.)

(b) $\sqrt[4]{8}\sqrt[4]{32}$,

$= (2^3 \cdot 2^5)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{8}{4}} = 2^2 = \underline{\underline{4}}$ 2P.

(Wer $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ kennt: 1P.)

(c) $\ln(30e^2) - \ln(5) - \ln(6)$, $= \ln(30) - \ln(5) - \ln(6) + \ln(e^2)$

$= \ln(e^2) = 2$ 2P.

(Wer $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ weiß: 1P.)

(d) $\binom{9}{2}$, $= \frac{9!}{2!\,7!} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 4 \cdot 9 = \underline{\underline{36}}$ 2P.

(Für die Def. von $\binom{n}{k}$: 1P.)

(e) $\sum_{k=2}^{10} (-1)^k \binom{11}{k}$. $= \underbrace{\sum_{k=0}^{11} (-1)^k \binom{11}{k}}_{=0} - 1 + 11 + 1 = \underline{\underline{11}}$ 2P.

(Für den binomischen Lehrsatz gibt's: 1P.)

Hinweis: In allen Teilaufgaben ist das richtige Ergebnis ganzzahlig.

4. **(5+5 P.)** Berechnen Sie die Matrixprodukte AB, BA und $A^\top B^\top$ für die nachstehenden Paare von Matrizen:

(a)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$ 2P.

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$ 2P.

$$A^T B^T = (BA)^T \underset{\text{hier}}{=} BA$$ 1P.

(b)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 + 4 + 3 = 10 \quad (\text{oder } (10))$$ 2P

$$BA = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ 2P.

$$A^T B^T = (BA)^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$ 1P.

5. **(1+6+3 P.)** Gegeben sei das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +z & = & 9 \\ -2x & -y & +5z & = & 5 \\ x & -y & +3z & = & 4 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ für dieses Gleichungssystem.

(b) Bringen Sie $(A|b)$ durch Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform. Geben Sie dabei (in Kurzschreibweise) an, welche Umformungen Sie durchführen.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$.

(a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ -2 & -1 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right) = (A|b)$$ 1P.

(b) ② → ② + 2·① und ③ → ③ − ① geben (2 P.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 7 & 23 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \longleftarrow 1P \\ \longleftarrow 1P \end{array}$$

Jetzt noch ③ → ③ + ② (1P), sodass

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 7 & 23 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow 1P. \end{array}$$

(c) Die 3. Zeile ergibt: $\underline{\underline{z = 2}}$ 1P.

Damit lautet ②: $3y + 14 = 23 \Longrightarrow \underline{\underline{y = 3}}$ 1P.

und schließlich: $x + 6 + 2 = 9 \Longrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$ 1P.

(Zsf. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist die eindeutige Lösung von $Ax = b$.)

6. **(2+1+2+3+2+3 P.)** Eine Matrix $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $p_{ij} \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ heißt eine stochastische Matrix. Für $n = 2$ sei also, mit $0 \leq p, q \leq 1$,

$$P := \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante $\det(P)$ in Abhängigkeit von p und q. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis.

(b) Unter welcher zusätzlichen Voraussetzung an p und q ist P invertierbar?

(c) Bestimmen Sie (in diesem Fall) die Inverse P^{-1}.

(d) Genügt P^{-1} der Spaltensummeneigenschaft einer stochastischen Matrix? Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) Unter welcher (weiteren) zusätzlichen Voraussetzung an p und q handelt es sich bei P^{-1} ebenfalls um eine stochastische Matrix?

(f) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $P_P(\lambda)$ und berechnen Sie die Eigenwerte von P.

(a) $\det(P) = (1-p)(1-q) - \underset{\nwarrow 1P.}{pq} = 1-p-q \; \nwarrow 1P.$

(b) P ist invertierbar, wenn $p+q \neq 1$ ist. 1P.

(c) $P^{-1} = \dfrac{1}{1-p-q} \begin{pmatrix} 1-q & -q \\ -p & 1-p \end{pmatrix}$ und schon dafür gibt's 2P.

(d) $= \begin{pmatrix} \frac{1-q}{1-p-q} & -\frac{q}{1-p-q} \\ -\frac{p}{1-p-q} & \frac{1-p}{1-p-q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p^* & q^* \\ p^* & 1-q^* \end{pmatrix}$ 1P.

für $p^* = \dfrac{-p}{1-p-q}$ und $q^* = \dfrac{-q}{1-p-q}$. 1P.

Also sind beide Spaltensummen $= 1$. 1P.

(e) Hierfür ist (neben $p+q \neq 1$) erforderlich, dass

$$0 \le \frac{-p}{1-p-q} \le 1 \quad \text{und} \quad 0 \le \frac{-q}{1-p-q} \le 1 .$$

Die jeweils erste Ungleichung ist erfüllt, wenn $p+q>1$ ist, die zweite benötigt dann

$$-p \ge 1-p-q \iff q \ge 1 \quad \text{bzw.} \quad p \ge 1$$

Außerdem gibt es die Möglichkeit $p=q=0$. Also

$$P = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 1P. \qquad \text{oder} \qquad P = P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 1P.$$

(f) $$P_p(\lambda) = (1-p-\lambda)(1-q-\lambda) - pq = \lambda^2 - \lambda(2-p-q) + 1-p-q \quad 1P.$$

mit den Nullstellen (= Eigenwerten)

$$\lambda_{1,2} = 1 - \frac{p+q}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(1-\frac{p+q}{2}\right)^2 - 1 + p+q}_{=\left(\frac{p+q}{2}\right)^2}} = \begin{cases} 1 \\ 1-p-q \end{cases} \quad \text{für jeden} \quad 1P.$$