Ergänzungen zur Matrixmultiplikation:

Zur Erinnerung: Gegeben seien eine $m \times n$-Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und eine $n \times k$-Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$, also

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \quad \text{und} \quad B = (b_{j\ell})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le \ell \le k}},$$

so definieren wir die $m \times k$-Matrix $AB \in \mathbb{R}^{m \times k}$

durch $AB = (c_{i\ell})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le \ell \le k}}$ mit

$$c_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{j\ell},$$

was der Multiplikation Zeile von A $\times$ Spalte von B wie beim Skalarprodukt entspricht.

Ein Spezialfall ist die Matrix-Vektormultiplikation: Für A wie oben und $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ist

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j .$$

(1.) Zum Zusammenhang zwischen Matrizen und linearen Abbildungen gilt

(a) Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definiert durch

$$x \longmapsto \varphi(x) := Ax$$

eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

(b) Umgekehrt existiert zu jeder linearen

Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ genau eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so daß $\varphi(x) = Ax$ gilt. Deren Komponenten sind gegeben durch

$$a_{ij} = \varphi_i(e_j), \quad e_j = (0, \dots, 0, \underset{j\text{-te Stelle}}{1}, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Begründung:

(a) $$\varphi_i(\lambda x + \mu y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\lambda x + \mu y)_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda a_{ij} x_j + \mu a_{ij} y_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \mu \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$$

$$= \lambda \varphi_i(x) + \mu \varphi_i(y)$$

Also ist jede Komponente von φ linear und damit φ selbst ebenso.

(b) $$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} \varphi_i(e_j) \cdot x_j \quad \left(\text{Wahl der } a_{ij}!\right)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \varphi_i(x_j e_j) = \varphi_i\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\Big) = \varphi_i(x)$$

Dies gilt für jede Komponentenfunktion und damit auch $Ax = \varphi(x)$.

Wir können also jede lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit einer sie darstellenden $m \times n$-Matrix identifizieren.

(2.) Eine Anwendung in den Wirtschaftswissenschaften

(E8)

Gegeben sei eine Anzahl konkurrierender Produkte

(1), (2), ..., (n),

z.B. Zahnpastasorten, Mittelklasseautos, politische Parteien, ..

x_j = Anzahl der Käufer von Produkt (j) zur Zeit t_0

y_i = " " " " " (i) " " $t_1 > t_0$

Diese Anzahlen werden zusammengefaßt in sog.

Marktverteilungsvektoren $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ bzw $y = (y_1, \dots, y_n)^T$

Frage: Wie geht y aus x hervor? Bzw.: Wie wird die Käuferwanderung angemessen beschreiben?

Nun berechnet sich z.B. y_1 zu

$$y_1 = p_{11} x_1 + p_{12} x_2 + \dots + p_{1n} x_n$$

Anteil der Kunden, die von (2) nach (1) wechseln.

Anteil der Kunden, die bei Produkt (1) bleibt.

Bilden wir also die Matrix $P = (p_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ mit

p_{ij} = Anteil der Käufer, die von (j) nach (i) wechseln $\in [0,1]$,

so besteht der lineare Zusammenhang $y = Px$.

Bleibt die Gesamtzahl aller Käufer konstant, gilt $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ (sog. stochastische Matrix!).

Die Matrix P wird als <u>Übergangsmatrix</u> bezeichnet, weil sie den Übergang von x zu y beschreibt. (E4)

Verallgemeinerung: Endliche Folge von Marktverteilungsvektoren

$$x^{(0)} \xrightarrow[P_1]{} x^{(1)} \xrightarrow[P_2]{} x^{(2)} \longrightarrow \dots \xrightarrow[P_N]{} x^{(N)}$$

mit möglicherweise verschiedenen Übergangsmatrizen $P_1, \dots, P_n$. Dann wird der Übergang von $x^{(0)}$ zu $x^{(N)}$ beschrieben durch

$$x^{(N)} = P_N \, x^{(N-1)} = \dots = P_N P_{N-1} \cdot \dots \cdot P_2 P_1 x^{(0)},$$

falls alle Übergangsmatrizen P_k übereinstimmen ($P_k = P \; \forall k \in \{1, \dots, N\}$) durch

$$x^{(N)} = P^N x^{(0)} .$$

③ Zeilenumformungen und Elementarmatrizen

Zulässige Zeilenoperationen im Gauss-Algorithmus sind

- Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(j) \to \lambda (j)$
- Addition einer Zeile zu einer anderen, $(j) \to (i) + (j)$
- Zeilenvertauschung: $(i) \leftrightarrow (j)$.

Diese lassen sich durch Multiplikation mit sogenannten "Elementarmatrizen" folgendermaßen darstellen:

Gegeben sei eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Wir multiplizieren von links mit verschiedenen $m \times m$-Matrizen: (E5)

① $$A_{\lambda,j} := \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{\lambda,j} \cdot A = \dots$$

j-te Stelle der Diagonalen

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{j1} & \cdots & \lambda a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

durch Multiplikation mit $A_{\lambda,j}$ wird also die j-te Zeile von A mit λ multipliziert. Der Rest der Matrix A bleibt unverändert.

② $$A_{i+j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \\ & \ddots & & 1 & \\ & & \ddots & 0 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \text{Zeile } i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \text{Spalte } j & \end{array} \Longrightarrow A_{i+j} \cdot A$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} + a_{j1} & \cdots & a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplikation von links mit A_{i+j} bewirkt also die Addition der j-ten Zeile zur i-ten.

(3)

$$A_{i\leftrightarrow j} := \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad i\text{-te} \quad j\text{-te} \\ \qquad\qquad \text{Spalte} \end{array} \Rightarrow A_{i\leftrightarrow j} \cdot A$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & 1 & & 1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ 0 & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Durch Multiplikation von links mit $A_{i\leftrightarrow j}$ werden also i-te und j-te Zeile vertauscht.

<u>Konsequenz</u>: Alle Umformungen im Gauss-Algorithmus können realisiert werden durch sukzessive Multiplikation von links mit den Elementarmatrizen $A_{\lambda,i}$, A_{i+j} und $A_{i\leftrightarrow j}$

Diesen einfachen Zsh. werden wir nutzen, um den Gauss-Algorithmus weiterzuentwickeln zu einem elementaren Verfahren zur Inversion (= Umkehrung) von Matrizen.