2.2 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Wir beginnen mit einem einfachen System aus zwei linearen Gleichungen für zwei Unbekannte $x, y \in \mathbb{R}$:

Bsp. 1:
$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 4x - 3y &= 1 \end{aligned}\right\} (LGS_0)$$

Die Aufgabe, (LGS_0) zu lösen bedeutet, alle geordneten Paare $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ zu finden, so dass beide Glg. in (LGS_0) erfüllt sind.

(Das Auffinden einer einzelnen Lösung ist also oftmals nicht ausreichend. Hingegen kann der Nachweis der Unlösbarkeit eines Systems die korrekte Lösung der Aufgabe sein.)

Eine Lösungsmethode, das sog. Eliminationsverfahren, besteht darin, Vielfache einer Zeile zur anderen zu addieren, so daß in dieser Zeile nur noch eine Unbekannte auftritt. Im vorliegenden Fall:

1. Zeile $\cdot 4$: $\quad 4x + 8y = 12$

Subtrahiere dies von Zeile 2: $\quad -11y = -11$, also $y = 1$.

Einsetzen in Zeile 1: $\quad x + 2 = 3$, also $x = 1$.

Mit dieser kurzen Rechnung ist gezeigt:

Wenn es eine Lösung von (LGS$_0$) gibt, so ist diese durch $\binom{x}{y} = \binom{1}{1}$ gegeben. (Eindeutigkeit)

Einsetzen zeigt: $\binom{x}{y} = \binom{1}{1}$ ist tatsächlich eine Lösung (erst hierdurch ist die Existenz einer Lösung gezeigt – zur Vermeidung von Fehlern sollte man diese Kontrolle stets durchführen).

<u>Ergebnis:</u> (LGS$_0$) besitzt genau eine Lösung, nämlich $\binom{x}{y} = \binom{1}{1}$.

Nicht jedes System linearer Gln. ist eindeutig lösbar, wie das folgende Bsp. zeigt:

<u>Bsp</u>. 2: (a)

$$x + 2y = 3$$
$$2x + 4y = 6$$

<u>Zeile</u> 1 $\cdot 2 =$ <u>Zeile</u> 2. Das System ist also äquivalent zur ersten Zeile! Jeder Vektor

$\binom{x}{\frac{1}{2}(3-x)} \in \mathbb{R}^2$ löst das System

<u>Problem: mangelnde</u>
<u>Eindeutigkeit</u>

(b)

$$x + 2y = 3$$
$$2x + 4y = 5$$

<u>Zeile</u> 1 $\cdot\, 2$ ergibt

$6 = 2x + 4y = 5$ Zeile 2

Die Existenz einer Lösung würde also $5 = 6$ nach sich ziehen, was unmöglich ist.

<u>Problem: Nichtexistenz</u>

Wir sehen: Ist die 'Determinante'(*)

$$ad-bc \neq 0,$$

so besitzt (LGS_2) höchstens eine Lösung $\binom{x}{y}$, und für diese gilt

$$x = \frac{rd-bs}{ad-bc} \quad \text{und} \quad y = \frac{as-rc}{ad-bc}.$$

Einsetzen zeigt: Dies ist tatsächlich eine Lösung.

<u>1. Ergebnis:</u> Ist $ad-bc \neq 0$, so ist (LGS_2) eindeutig lösbar.

Was kann für $ad-bc=0$ passieren? In diesem Fall hat man, wenn eine Lösung existiert, dass auch

(*) $as-rc=0$ und (**) $rd-bs=0$

gelten muß. Umgekehrt bedeutet dies:

<u>2. Ergebnis:</u> Ist $ad-bc=0$ und ($as \neq rc$ oder $rd \neq bs$), so ist (LGS_2) unlösbar.

<u>3. Ergebnis:</u> Im letzten Fall hat man $ad=bc$, $as=rc$ und $rd=bs$, also

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{r}{s} \quad \text{(oder umgekehrt)}$$

Die zweite Zeile ist also ein Vielfaches der ersten und man hat unendlich viele Lösungen, wie in Bsp 2 (a).

(*) Dieser Begriff wird später allgemein definiert.

Wir werden uns im folgenden damit beschäftigen, das 2.15
einfache Vorgehen in den obigen Beispielen zu verallgemeinern und zu systematisieren. In einem ersten Schritt betrachten wir ein allgemeines System aus zwei linearen Gleichungen für zwei Unbekannte:

Bsp. 3: Seien $a, b, c, d, r, s \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Gefragt ist nach allen Lösungen $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ des Systems

$$\left.\begin{array}{rcl} ax + by &=& r \\ cx + dy &=& s \end{array}\right\} \quad (LGS_2)$$

1. Gleichung $\cdot c$, 2. Gleichung $\cdot a$ ergibt

$$\begin{array}{rcll} acx + bcy &=& rc & (1) \\ acx + ady &=& as & (2) \end{array}$$

$$(2) - (1): (ad-bc)y = as - rc \qquad (*)$$

1. Gleichung $\cdot d$, 2. Gleichung $\cdot b$:

$$\begin{array}{rcll} adx + bdy &=& rd & (1) \\ bcx + bdy &=& bs & (2) \end{array}$$

$$(1) - (2): (ad-bc)x = rd - bs \qquad (**)$$

Im Allgemeinen betrachten wir ein System aus

m linearen Gleichungen für n Unbekannte:

$$\left.\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + \ldots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \ldots & + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \quad (LGS)$$

Hierbei sind: a_{ij}, b_i gegebene reelle Zahlen;

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ die gesuchte(n) Lösung(en);

der 1. Index $i \in \{1, \ldots, m\}$ der sogenannte "Zeilenindex": nummeriert die Gleichungen;

der 2. Index $j \in \{1, \ldots, n\}$ der "Spaltenindex", nummeriert die Komponenten der gesuchten Lösungen.

Zur symbolischen Kurzschreibweise führt man ein

- die "<u>Koeffizientenmatrix</u>" $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

  eine "$m \times n$"-Matrix

  (m: Zeilenanzahl, n: Spaltenanzahl)

- und für die rechte Seite des Gls-Systems den Vektor $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, so daß man (LGS) abkürzend schreiben kann als

$$Ax = b.$$

Das Produkt Ax der Matrix A mit dem Vektor x (linke Seite der Gleichung) wird hierbei folgendermaßen erklärt:

$$Ax = \begin{pmatrix} (Ax)_1 \\ \vdots \\ (Ax)_m \end{pmatrix}$$

, also ein Vektor mit m Komponenten, ebenso wie b.

Für $1 \leq j \leq m$ sind diese Komponenten zu berechnen nach $(Ax)_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i$,

so daß die Kurzform $Ax=b$ tatsächlich mit (LGS) übereinstimmt.

Ferner führt man noch die <u>„erweiterte Koeffizientenmatrix“</u> $(A \mid b)$ ein, die man erhält, wenn man die rechte Seite b als $n+1$-ste Spalte der Matrix A hinzufügt.

<u>Ziele</u>: – Kriterien für die Lösbarkeit von (LGS),

– Verfahren zur Bestimmung aller Lösungen.