1.6 Mittelwerte

Im folgenden seien $x_1, \dots, x_n$ positive reelle Zahlen. Gefragt ist nach einem sinnvollen Durchschnittswert dieser Zahlen. Was sinnvoll ist, hängt natürlich vom betrachteten Problem ab.

Am häufigsten verwendet wird das arithmetische Mittel

$$AM = AM(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k$$

z.B. zur Bestimmung

- durchschnittlicher Preise, Gewinne, Umsätze etc., bezogen auf gleiche Zeiträume,
- Schwerpunkte eines Systems gleich schwerer Massen u.v.a..

In vielen Fällen ist es sinnvoll, das AM durch Gewichtung zu verfeinern:

Bsp.: Sie kaufen verschiedene Mengen eines Gutes zu unterschiedlichen Preisen. Anschließend wollen Sie den durchschnittlichen Stückpreis wissen.

	Anzahl	Stückpreis
1.	4000	4 €,
2.	6000	5 €,
3.	3000	6 €,
4.	2000	8 €.

Offenbar liefert hier das arithmetische Mittel

$$AM = AM(4,5,6,8) = \frac{1}{4} \cdot 23 = 5{,}75$$

nicht das richtige Ergebnis, da die 2000 Stück zu 8 € genauso stark gewichtet werden, wie die 6000 Stück zu 5 €. Tatsächlich erhalten wir den durchschnittlichen Stückpreis durch folgende Rechnung:

$$\frac{\text{Preis}}{\text{Stück}} = \frac{\text{Gesamtkosten}}{\text{Gesamtstückzahl}}$$

$$= \frac{4000 \cdot 4 + 6000 \cdot 5 + 3000 \cdot 6 + 2000 \cdot 8}{4000 + 6000 + 3000 + 2000}$$

$$= \frac{16000 + 30000 + 18000 + 16000}{15000} = \frac{80}{15} = \frac{16}{3} = 5{,}\overline{33}$$

Derartige Beispiele führen auf den Begriff des gewichteten arithmetischen Mittels:

$$AM_w = AM_w(x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_n) := \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} r_k} \cdot \sum_{k=1}^{n} r_k x_k .$$

(Im Fall $r_1 = r_2 = \dots = r_n$ geht dies wieder in AM über.)

Ähnliche Gewichtungen existieren auch für andere Formen der Mittelwertbildung, dies soll im folgenden jedoch nicht weiter vertieft werden.

Zur Beschreibung von Wachstums- (oder auch Zerfalls-) prozessen ist eine andere Form der Mittelwertbildung angemessen. Gegeben sei eine endliche Folge

$$N_0, N_1, \dots, N_n$$

von Anzahlen einer Population etwa. Man kann auch an Vermögen in aufeinander folgenden Jahren, oder an Preise von Gütern in aufeinander folgenden Jahren denken. Von Interesse sind die daraus abgeleiteten Größen

$$x_k = \frac{N_k}{N_{k-1}}, \quad 1 \le k \le n,$$ das sind die <u>Wachstumsfaktoren</u>,

die zu den <u>Wachstumsraten</u> ε_k im Zusammenhang

$$x_k = 1 + \varepsilon_k$$

stehen.

Um einen durchschnittlichen Wachstumsfaktor zu berechnen definiert man das <u>geometrische Mittel</u>

$$GM = GM(x_1, \dots, x_n) := (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

Ist dies bekannt, läßt sich die Anzahl N_n nach n Zeiteinheiten (z.B. Jahren) in einfacher Weise aus der Anfangsanzahl N_0 ermitteln zu

$$N_n = GM(x_1, \dots, x_n)^n \cdot N_0 ,$$

was der einfachen Beziehung

$$n \cdot AM(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

beim arithmetischen Mittel entspricht.

Dem geometrischen Mittel der Wachstumsfaktoren entspricht eine <u>durchschnittliche Wachstumsrate</u>

$$\bar{\varepsilon} := \left(\prod_{k=1}^{n} (1+\varepsilon_k)\right)^{\frac{1}{n}} - 1 ,$$

so daß

$$N_n = (1+\bar{\varepsilon})^n \cdot N_0 = \left(\prod_{k=1}^{n} (1+\varepsilon_k)\right) \cdot N_0$$

Die Größe $\bar{\varepsilon}$ entspricht z.B. dem effektiven Jahreszinssatz bei mehrjährigen Anleihen.

Weitere Mittelwerte sind

- Das <u>harmonische Mittel</u>

$$HM = HM(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$$

und das <u>quadratische Mittel</u>

$$QM = QM(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Letzteres spielt in der Statistik und in der Fehlerrechnung eine Rolle.

Die vier genannten Formen der Mittelwertbildung sind die gebräuchlichsten. Man kann sie einbetten in eine kontinuierliche Skala von Potenzmittelwerten:

$$M_p(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (\text{für } p \neq 0)$$

$$M_0(x_1, \ldots, x_n) = GM(x_1, \ldots, x_n) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

$(M_{-1} = HM,\ M_1 = AM,\ M_2 = QM)$

Auf dieser Skala gelten für $p \leq q$ die Ungleichungen

$$\min(x_1, \ldots, x_n) \leq M_p(x_1, \ldots, x_n) \leq M_q(x_1, \ldots, x_n) \leq \max(x_1, \ldots, x_n),$$

insbesondere also

$$HM(x_1, \ldots, x_n) \leq GM(x_1, \ldots, x_n) \leq AM(x_1, \ldots, x_n) \leq QM(x_1, \ldots, x_n).$$