1.3 Wurzeln, Potenzen mit beliebigen Exponenten und Logarithmen

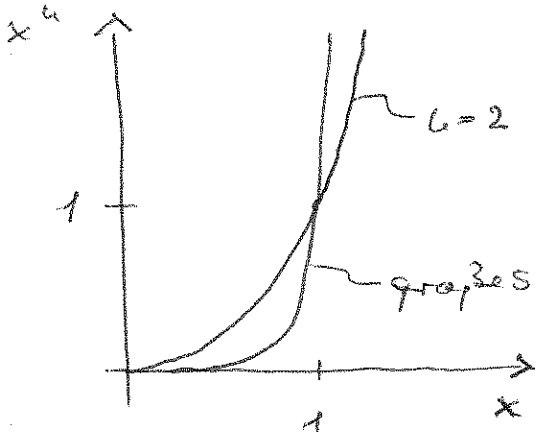
Für $n \geq 1$ ist die Potenz x^n einer reellen Zahl x erklärt

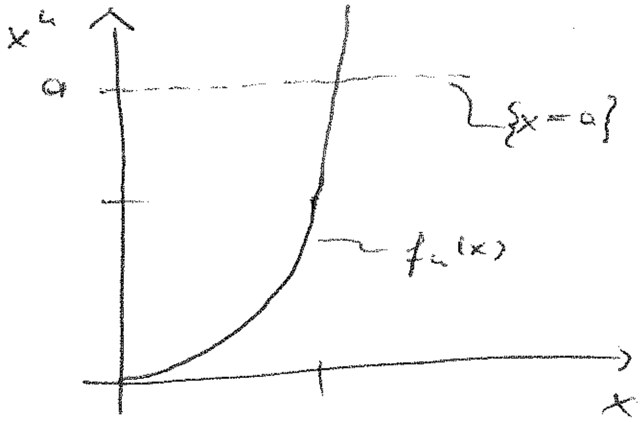
durch $$x^n = \prod_{i=1}^{n} x = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-mal}} .$$

Bei festem n wird hierdurch eine Funktion

$$f_n : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ , \quad x \longmapsto f_n(x) := x^n$$

definiert. Der Graph $G_{f_n} = \{ (x, x^n) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \}$ dieser Funktion hat die Gestalt eines Parabelastes:





Die Funktion f_n ist

- streng monoton steigend, d.h. für $x_1 < x_2$ gilt $f_n(x_1) < f_n(x_2)$, und daher injektiv, d.h. aus $f_n(x_1) = f_n(x_2)$ folgt, daß $x_1 = x_2$ ist,
- surjektiv, d.h. zu jedem $a \geq 0$ existiert ein $x \geq 0$ mit $a = x^n$.

Beide Eigenschaften zusammen ergeben:

- Zu jedem $a \geq 0$ existiert genau ein $x \geq 0$, so daß $a = f_n(x) = x^n$. (Eine Funktion f mit dieser Eigenschaft nennt man bijektiv.) Mit anderen Worten:

  Zu jedem $a \geq 0$ existiert genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $x^n = a$.

  Dies erlaubt die folgende

Def. Die eindeutig bestimmte Lösung $x \geq 0$ der Gleichung $x^n = a$ $(n \in \mathbb{N}, a \geq 0)$ bezeichnen wir als die <u>n-te Wurzel</u> aus a. Schreibweise: $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Konvention: $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$.

Mit Hilfe der n-ten Wurzel können wir die Potenz einer Zahl $a \geq 0$ für rationale Exponenten erklären:

Def.: Es seien $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $r = \frac{m}{n}$ und $a \geq 0$. Dann heißt $a^r := \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ die <u>Potenz</u> der <u>Basis</u> a mit dem <u>Exponenten</u> $r \in \mathbb{Q}$.

Rechenregeln (sog. "Potenzgesetze"):

$a^0 = 1$ $\qquad$ $(a^r)^s = a^{rs}$

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $\qquad$ $(ab)^r = a^r b^r$

$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

Die Erklärung der allgemeinen Potenz für $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist
etwas aufwendiger. Wir benötigen dazu die Exponential-
oder kurz e-Funktion.

Def. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben

durch $\exp(x) := e^x := \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Bem. (a) Es gilt die Reihendarstellung

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

(b) Die Zahl $e := \exp(1) \approx 2{,}718$ wird als Eulersche

Zahl bezeichnet.

<u>Eigenschaften:</u>

(i) $e^0 = 1$ und $e^x > 1$ für $x > 0$ (aus der Reihendar-

stellung ablesbar!);

(ii) Funktionalgleichung: $e^{x+y} = e^x e^y$

(nichttrivial, vgl. Potenzgesetze, führt zur Bez. e^x);

(iii) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ (aus: $1 = e^0 = e^{x-x} = e^x \cdot e^{-x}$),

insbes. $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

(iv) Für $h > 0$ ist $e^{x+h} = e^x \cdot \underbrace{e^h}_{>1} > e^x$, d.h. exp ist

streng monoton steigend und daher injektiv;

(v) Zu jedem $y > 0$ existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $y = e^x$

("exp ist surjektiv").

Die Eigenschaften (iv) und (v) zusammen ergeben: 18

Zu jedem $y > 0$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $y = e^x$, m.a.W.: Zu gegebenem $y > 0$ hat die Gleichung $y = e^x$. Dies erlaubt ähnlich wie oben die Definition einer Umkehrfunktion der Exponentialabbildung:

Def. Die eindeutig bestimmte Lösung x der Gleichung $e^x = y$ $(y > 0)$ wird als (natürlicher) Logarithmus von y bezeichnet: $x = \ln(y)$. Die dadurch definierte Funktion

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

heißt der (natürliche) Logarithmus.

Eigenschaften (bzw. Rechenregeln):

(i) $\ln(1) = 0$ (da $e^0 = 1$)

(ii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ (Funktionalgleichung)

(iii) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ (aus (i) und (ii))

(iv) $\ln(x^s) = s \cdot \ln(x)$ $(s \in \mathbb{Q})$

(v) $e^{\ln(x)} = x = \ln(e^x)$ (aus der Def.)

(vi) $\ln(e) = 1$ (da $e^1 = e$)

Bem.: Für $-1 < x \leq 1$ gilt $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$.

Damit kann man (zumindest näherungsweise) Logarithmen berechnen.

Mit Hilfe von exp und ln können wir jetzt auch Potenzen mit irrationalen Exponenten definieren:

Def.: Für $a>0$ und $x\in\mathbb{R}$ heißt $a^x := e^{(x\cdot \ln(a))}$ die Potenz mit Basis a und Exponent x.

Bem.: • $x=\frac{m}{n} \Rightarrow e^{x\ln(a)} = e^{\frac{m}{n}\cdot\ln(a)} \underset{(iv)}{=} e^{\ln(a^{\frac{m}{n}})}$

$\underset{(v)}{=} a^{\frac{m}{n}} = a^x$. Es handelt sich also um eine Verallgemeinerung der ersten Definition.

• Die oben für Exponenten $r\in\mathbb{Q}$ notierten Potenzgesetze gelten hier genauso.

Def.: Den Logarithmus zur Basis $a>0$ definieren wir durch: $\log_a : (0,\infty)\to\mathbb{R},\ x\mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Bem. (i) $\log_a$ ist die Umkehrfunktion von $x\mapsto a^x$, denn $\log_a(a^x) = \frac{1}{\ln(a)}\ln(a^x) = \frac{\ln(a)}{\ln(a)}x = x$.

(ii) Neben der Basis e des natürlichen Logarithmus sind die Basen $a=2$ und $a=10$ relevant.

$\log_{10}$ (manchmal: log, lg): dekadischer Log

Bsp. $\log_{10}(1000)=3$,

$\log_2$ (manchmal: ld): dyadischer Log.

Bsp. $\log_2(1024)=10$.

(iii) Logarithmusgesetze gelten entsprechend.