1.2 Zahlbereiche und Grundrechenarten

Die wichtigsten Zahlbereiche bzw. Mengen von Zahlen sind:

(1) Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$

Kennzeichen: • Ausgezeichnetes kleinstes Element 1,
• nicht abbrechender Zählvorgang, d.h. jede Zahl hat einen direkten Nachfolger

Rechenarten: Addition und Multiplikation möglich,
Einselement: $1 \cdot n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
"für alle"

(2) Die natürlichen Zahlen mit Null: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$,

entstehen aus $\mathbb{N}$ durch Hinzunahme der Null
→ neutrales Element der Addition: $n + 0 = n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

(3) Die ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,

entstehen aus $\mathbb{N}_0$ durch Hinzunahme der negativen Elemente, also der Lösungen der Gleichung $x + n = 0$
→ Subtraktion wird möglich.

(4) Die rationalen Zahlen: $\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}$

Division wird möglich durch Hinzunahme der Kehrwerte (= Lösungen von $x \cdot n = 1$) und ihrer Vielfachen,

die Gleichung $x \cdot x = 2$ besitzt keine Lösung,
der Kreisumfang läßt sich nicht exakt angeben

(5) Die reellen Zahlen $\mathbb{R} = \{a, a_1 a_2 a_3 \ldots : a \in \mathbb{Z},\ a_1, a_2, \ldots \in \{0, \ldots, 9\}\}$, (7)

seien hier aufgefaßt als die nicht abbrechenden Dezimalzahlen

$$a, a_1 a_2 a_3 \ldots = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \ldots,$$

wobei wir davon ausgehen, daß der durch .... angedeutete unendliche Prozess einer wohldefinierten Grenze zustrebt.

Wichtige Elemente aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $\sqrt{2}$, π, $e \left(= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$

Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$:

$\mathbb{R}_0^+ := \{a, a_1 a_2 \ldots \in \mathbb{R} : a \in \mathbb{N}_0\}$ (nichtnegative reelle Zahlen)

$\mathbb{R}^+ := \mathbb{R}_0^+ \setminus \{0\}$ (positive reelle Zahlen)

$x < y \;:\Longleftrightarrow\; y - x \in \mathbb{R}^+$ („x kleiner y")

Damit ist $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

$x \leq y \;:\Longleftrightarrow\; x < y$ oder $x = y$ („x kleiner gleich y.")

Damit ist $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

Mit Hilfe der Ordnungsrelation können wir auf $\mathbb{R}$ die Betragsfunktion definieren:

<u>Def.</u>: Für $x \in \mathbb{R}$ heißt $|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

der (Absolut-) Betrag von x.

(Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen: Genauer in 1.5)

Die in (1) bis (4) genannten Zahlbereiche sind Teilmengen der reellen Zahlen, es gelten die Inklusionen

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Ferner hat man $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}$. Weitere wichtige Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind die Intervalle ($a, b \in \mathbb{R}$ fest)

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossen)

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ $(=]a,b[\,)$ (offen)

$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (halboffen)

und die unendlich ausgedehnten, sog. uneigentlichen Intervalle wie z.B.

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

oder auch $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Beispiel für $\cap$ und $\cup$ von Intervallen:

(1) Ist $a < c < b < d$, so gilt

$[a,b] \cap [c,d] = [c,b]$; $[a,b] \cup [c,d] = [a,d]$

$(a,b) \cap [c,d] = [c,b)$; $(a,b) \cup [c,d] = (a,d]$

usw.

(2) Ist $a < b < c < d$, so ergibt sich nur wenig Vereinfachung:

$[a,b] \cap [c,d] = \emptyset$, $[a,b] \cup [c,d] = [a,b] \cup [c,d]$

(kein Intervall!)

In allen Zahlbereichen $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \dots, \mathbb{R}$ ist die Addition definiert, (9)

Sie ist

- kommutativ, d.h. $a+b=b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

und

- assoziativ, d.h. $a+(b+c)=(a+b)+c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

<u>Endliche Summen:</u>
Aufgrund der Assoziativität können wir beliebig viele Summanden ohne Klammerung aufaddieren. Wir setzen für $m,n \in \mathbb{Z}$ und $a_m, a_{m+1}, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n, \quad \text{falls } n \geq m$$

$$\text{und} \quad \sum_{k=m}^{n} a_k = 0, \quad \text{falls } m > n \quad (\text{"leere Summe"})$$

Hierbei darf die Reihenfolge beliebig vertauscht werden.
In der Regel beginnt man mit $m=1$ oder $m=0$.
Der sogenannte "Laufindex" k kann durch jeden anderen Buchstaben ($\neq n, m$!) ersetzt werden.

Einige "Regeln" für den Umgang mit dem Summenzeichen seien fixiert:

$$\sum_{k=m}^{n} c a_k + d b_k = c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k + d \sum_{k=m}^{n} b_k \quad (\text{Linearität})$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_{k+l} = \sum_{k=m+l}^{n+l} a_k \quad (\text{Umindizierung})$$

Hierbei: $c,d \in \mathbb{R}$, $l,m,n \in \mathbb{N}$

Einige einfache Beispiele:

(1) $\sum_{k=m}^{n} a = a \sum_{k=m}^{n} 1 = a \cdot \text{Anzahl der Summanden} = a(n-m+1)$

(2) $\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5 = 15$

(3) $\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1+4+9+16 = 30$

Endliche Produkte: In ähnlicher Weise benutzen wir ein Produktzeichen zur Multiplikation beliebig vieler Faktoren.

Wir setzen

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n \quad (\text{falls } n \geq m)$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := 1 \quad (\text{falls } n < m, \text{ sog. „leeres Produkt"})$$

Die Produktbildung ist nicht linear, es gilt jedoch

$$\prod_{k=m}^{n} a_k \cdot b_k = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right)$$

Bsp. (1) $\prod_{k=1}^{4} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 =: 4!$ $(= 24)$ (4 Fakultät),

allgemeiner: $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ (n-Fakultät). Beachte: $0! = 1$.

(2) $\prod_{k=1}^{n} a = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} =: a^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$, insbes. $a^0 = 1$.

Für $a \neq 0$ erklären wir auch $a^{-n} := \dfrac{1}{a^n}$.

Genügt eine Folge $(a_n) = (a_1, a_2, \dots)$ einem einfachen Bildungsgesetz, so ist in manchen Fällen $\sum_{k=1}^{n} a_k$ explizit berechenbar.

Bsp. (1) $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Begründung:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & + 2 & + \dots & + & n \\ n & +(n-1) & + \dots & + & 1 \\ \hline (n+1) & +(n+1) & + \dots & + & (n+1) \end{array}$$

Also: $2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$

(durch 2 teilen ⇒ Beh.

Allgemeiner: Eine Folge $(a_n) = (a_1, a_2, \dots)$ heißt **arithmetisch**, falls $a_{k+1} - a_k = d$ mit einem festen $d \in \mathbb{R}$. Für eine solche Folge gilt

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_n + a_1)}{2}}$$

Begründung: $a_k = a_{k-1} + d = a_{k-2} + 2d = \dots = a_1 + (k-1)d$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 + (k-1)d = n \cdot a_1 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) d$$

$$= n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$$

Beachten wir $(n-1) \cdot d = a_n - a_1$ (s.o.) erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot a_1 + \frac{n}{2}(a_n - a_1) = \frac{n}{2}(a_n + a_1),$$

wie behauptet.

(2) Ähnliche Formeln gelten für Summen über höhere Potenzen. Ohne Beweis seien

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) \quad \text{und}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\, n^2 (n+1)^2$$

angegeben.

(3) "Geometrische Summenformel". Für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist gefragt nach $\sum_{k=1}^{n} q^k$. Wir multiplizieren den Ausdruck mit $(1-q)$ und erhalten

$$(1-q) \cdot \sum_{k=1}^{n} q^k = q - q^2 + q^2 - q^3 \pm \ldots - q^n + q^n - q^{n+1} = q - q^{n+1}$$

Also $$\boxed{\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q - q^{n+1}}{1-q}}$$

Falls $-1 < q < 1$ hat man $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ und daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{q - q^{n+1}}{1-q} = \frac{q}{1-q}$$

bzw. nach Division durch q

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}} \qquad \text{("geometrische Reihe")}$$

Anwendung: Umrechnung eines periodischen Dezimalbruchs in einen gewöhnlichen Bruch:

$$0,\overline{2} = 0,222\ldots = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \ldots = \frac{2}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots\right)$$

$$= \frac{2}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{2}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10}\cdot\frac{10}{9} = \frac{2}{9}$$

(4) Auch für die geometrische Summenformel gibt es eine Verallgemeinerung. Eine Folge $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots)$ heißt geometrisch, wenn der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ konstant ist. In diesem Fall hat man

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-q}.$$

(5) Binomialkoeffizienten und binomischer Lehrsatz

Bekannt sind die binomischen Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Um die erste dieser Formeln auf höhere Exponenten zu verallgemeinern, definiert man für $n \in \mathbb{N}_0$, $0 \le k \le n$, die "Binomialkoeffizienten"

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Darstellung im Pascalschen Dreieck:

1 $\quad n=0$

1 1 $\quad n=1$

1 2 1 $\quad n=2$

1 3 3 1 $\quad n=3$

1 4 6 4 1 $\quad n=4$

1 5 10 ...

Bildungsgesetz:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Binomischer Lehrsatz: Für $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}.$$

Bsp. (i) $n=3$: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(ii) $n=4$: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

(iii) $a=b=1$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(iv) $a=-b=1$ $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{für } n=0 \\ 0 & \text{für } n \geq 1 \end{cases}$