Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. DR. AXEL GRÜNROCK

WS 2013/14
17.02.2014

Klausur zu Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler (B)

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (ausser Stift und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Einfache Rechenaufgaben)	10 Punkte
A3 (Gleichungen und Ungleichungen)	8 Punkte
A4 (Skalarprodukt und euklidische Norm im $\mathbb{R}^3$)	6 Punkte
A5 (Lineares Gleichungssystem)	10 Punkte
A6 (Matrizen und lineare Abbildungen)	6 Punkte
A7 (Matrixinversion mit dem Gauss-Algorithmus)	8 Punkte

Bei den Aufgaben 1,2,3,4 und 6 werden lediglich die (Teil-)Ergebnisse korrigiert. Es empfiehlt sich also im besonderen Masse, Rechen- und Übertragungsfehler zu vermeiden. Die Klausur gilt mit 23 (von 58 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Zu jeder linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert ein Vektor $a \in \mathbb{R}^n$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $F(x) = \langle x, a \rangle$.

Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(b) Es gibt genau 720 Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, 6$.

Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(c) Für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(n + k)! = n!k!$.

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(Betrachte z.B. $n = k = 1$)

(d) Die Vereinigung zweier Untervektorräume ist wieder ein Untervektorraum.

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(Betrachte z.B. zwei orthogonale Geraden im $\mathbb{R}^2$!)

(e) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $\ln(a + b) = \ln a \ln b$.

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(Die Funktionalgleichung für den ln lautet
$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.)

2. **(1+1+1+1+2+2+2 P.)** Berechnen Sie:

(a) $\frac{5+\frac{11}{2}}{\frac{7}{2}} + \frac{\frac{3}{5}+1}{\frac{2}{5}} = \frac{10+11}{7} + \frac{3+5}{2} = 3 + 4 = \underline{\underline{7}}$ 1P.

(b) $\binom{11}{2} = \frac{11!}{9!\,2!} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 5 \cdot 11 = \underline{\underline{55}}$ 1P.

(c) $\log_3(27^2) = 2 \cdot \log_3(27) = 2 \cdot \log_3(3^3) = \underline{\underline{6}}$ 1P.

(d) $\sqrt[3]{4}\sqrt[6]{4} = 4^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2}}$ 1P.

(e) $\sum_{k=1}^{99} 2k = 2 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} = \underline{\underline{9900}}$ 2P.

(1P. bei Kenntnis der Summenformel)

(f) $\ln(20e) - 2\ln 2 - \ln 5 = \ln(e) + \ln\left(\frac{20}{2^2 \cdot 5}\right) = \underline{\underline{1}}$ 2P.

(1P. bei Kenntnis der ln-Regeln)

(g) Das geometrische Mittel der Zahlen $1, 2, 4, 8, 16$. 2P.

$GM(1,\ldots,16) = \sqrt[5]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 16} = 2^{\frac{10}{5}} = \underline{\underline{4}}$

(1P. für die Kenntnis der Def.)

Hinweis: In allen Teilaufgaben ist das richtige Ergebnis ganzzahlig.

3. (4×2 P.) Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der nachstehenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

(a) $x^2 + 2x = 48 \iff x^2 + 2x - 48 = 0$

$\iff x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+48} = -1 \pm 7$

$\iff x \in \{-8, 6\} =: \mathbb{L}$ (2P.)

(1P. bei Kenntnis der p-q-Formel.)

(b) $(x-1)^2 \geq 9 \iff |x-1| \geq 3$

$\iff x \geq 4 \lor x \leq -2$

$\iff x \in (-\infty, -2] \cup [4, \infty) =: \mathbb{L}$ (2P.)

(1P., falls erkannt wurde, dass die Lösungsmenge aus zwei disjunkten Geraden besteht.)

(c) $\sqrt{2x+1} = x - 1 \implies 2x + 1 = x^2 - 2x + 1$

$\iff x^2 - 4x = 0 \iff x \in \{0, 4\}$

(1P.)

$x = 4$ ist eine Lösung,

es gibt keine weiteren (insbes. ist $x = 0$ keine) (1P.)

(d) $\dfrac{2x+3}{x-4} \leq 1.$

(i) $x > 4: \implies 2x + 3 \leq x - 4 \iff x \leq -7.$ Kein Beitrag.

(ii) $x < 4: \implies 2x + 3 \geq x - 4 \iff x \geq -7.$

Ergebnis: $\mathbb{L} = [-7, 4)$ (2P.)

(1P., wenn die Lösungsmenge als ein beschränktes Intervall erkannt wurde.)

4. **(2+2+2 P.)** Für die Vektoren $x = (1, 2, -3)^\top, y = (-2, 3, 1)^\top$ und $z = (0, -4, 2)^\top$ berechne man

(a) $|y|^2$ und $|z|^2$,

$|y|^2 = 2^2 + 3^2 + 1^2 = 4 + 9 + 1 = \underline{\underline{14}}$ 1P.

$|z|^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = \underline{\underline{20}}$ 1P.

(b) $|x - y|^2$ und $|z + x|^2$,

$x - y = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 2-3 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow |x-y|^2 = 3^2 + 1^2 + 4^2 = \underline{\underline{26}}$ 1P.

$z + x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow |z + x|^2 = 1 + 4 + 1 = \underline{\underline{6}}$ 1P.

(c) $\langle x, y\rangle$ und $\langle y, z\rangle$.

$\langle x,y \rangle = (1,2,-3)\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 6 - 3 = \underline{\underline{1}}$ 1P.

$\langle y, z \rangle = (-2,3,1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = -12 + 2 = \underline{\underline{-10}}$ 1P.

5. **(1+4+2+3 P.)** Gegeben sei das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x \quad\quad - z &= 2 \\ x + y + 2z &= 9 \\ -x + 2y \quad\quad &= 5 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ für dieses Gleichungssystem.

(b) Bringen Sie $(A|b)$ durch Zeilenoperationen des Typs ⓘ → ⓘ + λ ⓙ auf Zeilenstufenform. Geben Sie dabei an, welche Umformungen Sie durchführen.

(c) Berechnen Sie $\det A$. Welche Folgerung ergibt sich hieraus für die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$?

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$.

(a) $$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right)$$ 1P.

(b) ② → ② − ① und ③ → ③ + ① 1P.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right)$$ 2P.

③ → ③ − 2·② ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right)$$ 1P.

Noch A5:

(c) $\det A = -7$ 1P.

$Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung 1P.

(d) $-7z = -7 \Rightarrow z = 1$ 1P.

$y + 3\underset{\overset{\|}{1}}{z} = 7 \Rightarrow y = 4$ 1P.

$x - z = 2 \Rightarrow x = 3$ 1P.

Also: $(x, y, z) = (3, 4, 1)$

6. (**6 P.**) Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit

$$F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \qquad F\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{F}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$F(e_1) = F\left(\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$ 2P.

$$F(e_2) = F\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$ wie angegeben 1P.

$$F(e_3) = F\left(\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$ 2P.

und bestimmen Sie eine 3×3-Matrix A, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt $F(x) = Ax$.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$ 1P.

7. **(5 + 3 P.)** Gegeben sei die 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bringen Sie diese Matrix durch Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform. Führen Sie simultan dieselben Zeilenoperationen an der Einheitsmatrix E_3 durch.

(b) Berechnen Sie A^{-1} mit Hilfe weiterer Zeilenoperationen.

(a) Start mit $(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ (1P.)

① ↔ ② ergibt (1P.)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ (1P.)

② → ② − ① und ③ → ③ − ① (1P.)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$ (1P.)

Damit ist (a) erledigt. 5 P. für alle, die dieses Teilergebnis (wie auch immer) erreichen.

(b) ② → ② − ③ (1P.)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$ (1P.)

Also: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (1P.)