Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. DR. AXEL GRÜNROCK

WS 2013/14
17.02.2014

Klausur zu Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler (A)

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (ausser Stift und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Einfache Rechenaufgaben)	10 Punkte
A3 (Gleichungen und Ungleichungen)	8 Punkte
A4 (Skalarprodukt und euklidische Norm im $\mathbb{R}^3$)	6 Punkte
A5 (Lineares Gleichungssystem)	10 Punkte
A6 (Matrizen und lineare Abbildungen)	6 Punkte
A7 (Matrixinversion mit dem Gauss-Algorithmus)	8 Punkte

Bei den Aufgaben 1,2,3,4 und 6 werden lediglich die (Teil-)Ergebnisse korrigiert. Es empfiehlt sich also im besonderen Masse, Rechen- und Übertragungsfehler zu vermeiden. Die Klausur gilt mit 23 (von 58 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst bijektiv, wenn zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ existiert, so dass $f(x) = y$.

   Antwort: richtig ◯ falsch ⊗ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (Das ist die definierende Eigenschaft einer Funktion.)

   (b) Es gibt genau 5041 Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, 7$.

   Antwort: richtig ◯ falsch ⊗ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   ($7! = 5040$.)

   (c) Für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{n+k}{k} = \binom{n+k}{n}$.

   Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (d) Der Durchschnitt zweier Untervektorräume ist wieder ein Untervektorraum.

   Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (e) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $\exp ab = \exp a + \exp b$.

   Antwort: richtig ◯ falsch ⊗ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (Die Funktionalgleichung der e-Funktion lautet $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.)

2. (1+1+1+1+2+2+2 P.) Berechnen Sie:

(a) $\frac{5+\frac{11}{2}}{\frac{3}{2}}+\frac{\frac{5}{7}+1}{\frac{4}{7}}$ $= \frac{10+11}{3} + \frac{12}{4} = 7+3 = \underline{\underline{10}}$ 1P.

(b) $\binom{10}{8} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 5 \cdot 9 = \underline{\underline{45}}$ 1P.

(c) $\log_2(4^7)$ $= 7 \cdot \log_2(4) = 7 \cdot \log_2(2^2) = \underline{\underline{14}}$ 1P.

(d) $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}$ $= \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{3^3} = \underline{\underline{3}}$ 1P.

(e) $\sum_{k=11}^{20} k$ $= \frac{1}{2}(20 \cdot 21 - 10 \cdot 11) = 210 - 55 = \underline{\underline{155}}$ 2P.

(1P.) bei Kenntnis der Summenformel

(f) $\ln(30e) - \ln 5 - \ln 6$ $= \ln(e) + \ln\left(\frac{30}{5 \cdot 6}\right) = \underline{\underline{1}}$ 2P.

(1P.) bei Kenntnis der Regeln für ln.

(g) Das geometrische Mittel der Zahlen $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$.

$GM\left(\frac{1}{2}, \ldots, 8\right) = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8\right)^{\frac{1}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{5}} = \underline{\underline{2}}$ 2P.

(1P.) für die Kenntnis der Def.

Hinweis: In allen Teilaufgaben ist das richtige Ergebnis ganzzahlig.

3. **(4×2 P.)** Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der nachstehenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

(a) $x^2 - 2x = 35 \iff x^2 - 2x - 35 = 0$

$\iff x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+35} = 1 \pm 6$

$\iff x \in \{-5, 7\} =: \mathbb{L}$ (2P.)

(1P. bei Kenntnis der p-q-Formel)

(b) $(x-3)^2 \geq 4 \iff |x-3| \geq 2$

$\iff x \leq 1 \vee x \geq 5$

$\iff x \in (-\infty, 1] \cup [5, \infty) =: \mathbb{L}$ (2P)

(1P., wenn die Struktur der Lösungsmenge – Vereinigung zweier Halbgeraden – erkannt wurde)

(c) $\sqrt{x+1} = 2x - 1 \implies x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$

$\iff 4x^2 - 5x = 0 \iff x \in \{0, \frac{5}{4}\}$

$x = \frac{5}{4}$ löst die ursprüngliche Gleichung (1P.)

Es gibt keine weiteren Lösungen (x=0 löst nicht die Wurzelgleichung). (1P.)

(d) $\dfrac{3x+2}{x-3} \leq 2.$

(i) $x > 3$: $\implies 3x + 2 \leq 2x - 6 \implies x \leq -8$. kein Beitrag

(ii) $x < 3$: $\implies 3x + 2 \geq 2x - 6 \implies x \geq -8$.

Ergebnis: $\mathbb{L} = [-8, 3)$ (2P.)

(1P., wenn die Lösungsmenge als ein beschränktes Intervall erkannt wurde.)

4. **(2+2+2 P.)** Für die Vektoren $x = (1,2,-3)^\top, y = (-2,3,1)^\top$ und $z = (0,-4,2)^\top$ berechne man

(a) $|y|^2$ und $|z|^2$,

$|y|^2 = 2^2 + 3^2 + 1^2 = 4 + 9 + 1 = \underline{\underline{14}}$ 1P.

$|z|^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = \underline{\underline{20}}$ 1P.

(b) $|x-y|^2$ und $|z+x|^2$,

$x - y = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 2-3 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow |x-y|^2 = 3^2 + 1^2 + 4^2 = \underline{\underline{26}}$ 1P.

$z + x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow |z+x|^2 = 1 + 4 + 1 = \underline{\underline{6}}$ 1P.

(c) $\langle x, y\rangle$ und $\langle y, z\rangle$.

$\langle x,y \rangle = (1,2,-3)\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 6 - 3 = \underline{\underline{1}}$ 1P.

$\langle y,z \rangle = (-2,3,1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = -12 + 2 = \underline{\underline{-10}}$ 1P.

5. **(1+4+2+3 P.)** Gegeben sei das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x - y \quad\quad &= -1 \\ x \quad\quad - 2z &= 0 \\ -x + 2y + 2z &= 8 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ für dieses Gleichungssystem.

(b) Bringen Sie $(A|b)$ durch Zeilenoperationen des Typs ⓘ → ⓘ + λ ⓙ auf Zeilenstufenform. Geben Sie dabei an, welche Umformungen Sie durchführen.

(c) Berechnen Sie $\det A$. Welche Folgerung ergibt sich hieraus für die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$?

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$.

(a) $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right)$ 1P.

(b) ② → ② - ① und ③ → ③ + ④ 1P.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right)$$ 2P.

③ → ③ - ② ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right)$$ 1P.

(c) Es folgt $\det A = 4$ 1P.

Da $\det A \neq 0$ ist, ist $Ax = 0$ eindeutig lösbar (besitzt also nur die Lösung $x = 0$). 1P.

(d) $4z = 6 \Rightarrow z = \frac{3}{2}$ 1P.

$y - 2z = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 4$ 1P.

$x = y - 1 = 3$ 1P.

Also $(x, y, z) = (3, 4, \frac{3}{2})$

6. (**6 P.**) Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit

$$F\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{F}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$F(e_1) := F\left(\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \underline{2P.}$$

$$F(e_2) := F\left(\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}. \qquad \underline{2P.}$$

$$F(e_3) := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{(wie angegeben)} \qquad \underline{1P.}$$

und bestimmen Sie eine 3×3-Matrix A, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt $F(x) = Ax$.

$$A := \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad 1P.$$

7. (5 + 3 P.) Gegeben sei die 3×3-Matrix

Startpunkt ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A \mid E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \underline{1P.}$$

(a) Bringen Sie diese Matrix durch Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform. Führen Sie simultan dieselben Zeilenoperationen an der Einheitsmatrix E_3 durch.

(b) Berechnen Sie A^{-1} mit Hilfe weiterer Zeilenoperationen.

(a) $1 \longleftrightarrow 2$ ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \underline{2P.}^{(*)}$$

$3 \to 3 - 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \underline{2P.}^{(*)}$$

Damit ist Teil (a) erledigt. Wer durch andere Umformungen zum selben Ergebnis kommt, erhält ebenfalls 5 P.

(b) $1 \to 1 - 3$ ergibt

$$\left(\begin{array}{c|ccc} E_3 & 1 & 1 & -1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (2P.)^{(*)}$$

also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1P.)$$

(*) Hierbei: 1P. für die Angabe der Zeilenoperationen (so diese denn sinnvoll und zielführend ist).