Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
APL. PROF. DR. AXEL
GRÜNROCK

WS 2020/21
25.02.2021

1. Klausur zu Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Bitte die nächsten beiden Zeilen unbedingt ausfüllen!

Name, Vorname: .... Lösung und Wartweg ....

Matrikelnummer: ....

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (außer Stift und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Einfache Gleichungen)	9 Punkte
A3 (Einfache Ungleichungen)	10 Punkte
A4 (Skalarprodukte im $\mathbb{R}^3$)	6 Punkte
A5 (Multiplikation von Matrizen)	9 Punkte
A6 (Determinanten und Invertierbarkeit)	7 Punkte
A7 (Matrixinversion mit dem Gauss-Algorithmus)	9 Punkte

In Aufgabe 1 sollen Sie entscheiden, ob die vorgelegten mathematischen Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie dies bitte in den dafür vorgesehenen Kreisen auf Seite 3 an. Bei den Aufgaben 2 bis 6 werden lediglich die Ergebnisse korrigiert. Es empfiehlt sich also im besonderen Maße, **Rechen- und Übertragungsfehler zu vermeiden. Tragen Sie Ihre Ergebnisse zu diesen Aufgaben bitte auf S. 2 ein. Diese Einträge sind maßgeblich für die Korrektur!** Bei Aufgabe 7 wird auch der Rechenweg bewertet. Die Klausur gilt mit 24 (von 60 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2-6	7	Σ	Note
Punkte/Note					

Lös. Aufg. 2 (a) $\mathbb{L} = \{3, -5\}$ (b) $\mathbb{L} = \{-3\}$ /2+2P.

(c) $\mathbb{L} = \{7\}$ (d) $\mathbb{L} = (0, \infty)$ /2+3P.

Lös. Aufg. 3 (a) $\mathbb{L} = \{\pm 1\}$ (b) $\mathbb{L} = [\frac{8}{3}, \infty)$ /2+3P.

(c) $\mathbb{L} = [3, \infty)$ (d) $\mathbb{L} = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$ /2+3P.

Lös. Aufg. 4 (a) $|x|^2 = 26$ $|y|^2 = 9$ / 2P.

(b) $\langle x, z\rangle = 0$ $\langle y, z\rangle = 14$ / 2P.

(c) $\langle x+y, x-y\rangle = 17$ $\langle z, x+y\rangle = 14$ / 2P.

Lös. Aufg. 5 (a) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$ / 2P.

$BA = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ $A^{\top}B^{\top} =$ BA (s. lks.) /2+1P.

Lös. Aufg. 5 (b) $AB = (3)$ / 1 ~~2~~P.

$BA = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $A^{\top}B^{\top} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ /2+1P.

Lös. Aufg. 6 (a) $\det A = -2$ Invertierbar? Ja (X)/Nein ( ) / 4P.

$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

Lös. Aufg. 6 (b) $\det B = 0$ Invertierbar? Ja ( )/Nein (X) / 3P.

$B^{-1} =$ /

$\Sigma =$

1. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen stets richtig, und welche im allgemeinen falsch sind. (Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!)

(a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $\exp ab = \exp a + \exp b$.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(b) Es gibt genau 4741 Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, 7$.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(c) Zwischen dem harmonischen Mittel HM und dem arithmetischen Mittel AM besteht für positive Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ die Beziehung

$$AM(x_1, \ldots, x_n) \leq HM(x_1, \ldots, x_n).$$

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(d) Der Durchschnitt zweier Untervektorräume ist wieder ein Untervektorraum.
Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(e) Für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(n + k)! = n!k!$.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

2. **(2+2+2+3 P.)** Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der nachstehenden Gleichungen:

(a) $x^2 + 2x = 15$, $\iff x^2 + 2x - 15 = 0 \iff x \in \{-1 \pm \sqrt{1+15}\}$

$\iff x \in \{-1 \pm 4\} = \{3, -5\}$

(b) $\frac{1}{2 + \frac{3}{4+x}} = \frac{1}{5}$, $\iff 2 + \frac{3}{4+x} = 5 \iff \frac{3}{4+x} = 3 \iff 1 = 4 + x$

$\iff x = -3$

(c) $x - \sqrt{4x-3} = 2$, $\iff x - 2 = \sqrt{4x-3} \implies x^2 - 4x + 4 = 4x - 3$

$\iff x^2 - 8x + 7 = 0 \iff x \in \{4 \pm \sqrt{16-7}\} = \{4 \pm 3\} = \{1, 7\}$

Hiervon ist $x = 1$ keine Lösung, $x = 7$ hingegen schon.

Also: $\mathbb{L} = \{7\}$

(d) $\ln(ex) = \ln(x) + 1$. $\ln(ex) = \ln(e) + \ln(x) = 1 + \ln(x)$

gilt für alle x, für die ln definiert ist.

Also: $\mathbb{L} = (0, \infty)$.

Vergessen Sie nicht, Ihre Ergebnisse auf S. 2 einzutragen!

3. **(2+3+2+3 P.)** Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der nachstehenden Ungleichungen:

(a) $x^2 - 2|x| + 1 \leq 0,$ $\iff (|x|-1)^2 \leq 0 \iff |x| = 1 \iff x \in \{\pm 1\}$

(b) $|x-3| \leq 2x-5,$ Fallunterscheidung:

(i) $x \geq 3$: $x-3 \leq 2x-5 \iff 2 \leq x \leadsto$ Alle $x \geq 3$ sind Lsgn.

(ii) $x < 3$: $3-x \leq 2x-5 \iff 8 \leq 3x \iff \frac{8}{3} \leq x$

$\leadsto$ Alle $x \in [\frac{8}{3}, 3]$ sind Lösungen.

Zsf. $\mathbb{L} = [\frac{8}{3}, \infty)$

(c) $2^x \geq 8,$ $\log_2$ von beiden Seiten ergibt...

$\iff x \geq \log_2(8) = 3$ (denn: $8 = 2^3$!)

Also $\mathbb{L} = [3, \infty)$

(d) $\ln(x^2 - 5x + 7) \geq 0.$ $\iff x^2 - 5x + 7 \geq 1 \iff x^2 - 5x + 6 \geq 0$

$\iff (x-2)(x-3) \geq 0 \iff x \geq 3$ oder $x \leq 2$

Vergessen Sie nicht, Ihre Ergebnisse auf S. 2 einzutragen!

4. **(2+2+2 P.)** Für die Vektoren $x = (1, 4, 3)^\top, y = (2, -1, 2)^\top$ und $z = (5, -2, 1)^\top$ berechne man

(a) $|x|^2$ und $|y|^2$,

$|x|^2 = 1 + 16 + 9 = 26$

$|y|^2 = 4 + 1 + 4 = 9$

(b) $\langle x, z\rangle$ und $\langle y, z\rangle$,

$\langle x, z\rangle = 5 - 8 + 3 = 0$

$\langle y, z\rangle = 10 + 2 + 2 = 14$

(c) $\langle x + y, x - y\rangle$ und $\langle z, x + y\rangle$.

$\langle x+y, x-y\rangle = |x|^2 - |y|^2 = 26 - 9 = 17$

$\langle z, x+y\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = 14$

5. **(5+4 P.)** Berechnen Sie die Matrixprodukte AB, BA und $A^\top B^\top$ für die nachstehenden Paare von Matrizen:

(a)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T B^T = (BA)^T \underset{\text{hier}}{=} BA \quad (\text{s.o.})$$

(b)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = (3 + 2 - 2) = (3) \quad (\Leftarrow 1\times 1\text{-Matrix})$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^T B^T = (BA)^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. **(4+3 P.)** Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen. Entscheiden Sie über deren Invertierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse:

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

(a) $\det(A) = 18 - 20 = -2$ $\rightsquigarrow$ invertierbar

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

(b) $\det(B) = 0$

(Kästchensatz oder die Feststellung, dass

④ = 3 · ③)

$\rightsquigarrow$ nicht invertierbar.

7. **(4+1+4 P.)** Gegeben sei die 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Bringen Sie diese Matrix durch Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform. Führen Sie simultan dieselben Zeilenoperationen an der Einheitsmatrix E_3 durch. Geben Sie die von Ihnen durchgeführten Zeilenoperationen explizit (in Kurznotation) an.

(b) Bestimmen Sie $\det(A)$.

(c) Berechnen Sie A^{-1} mit Hilfe weiterer Zeilenoperationen (auch diese bitte angeben).

(a) $$(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$2 \to 2 - 2 \cdot 1$ $\quad$ 1P. $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ 1P.

$3 \to 3 - 2 \cdot 2$ $\quad$ 1P $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$ 1P.

(b) Jetzt ablesbar: $\det(A) = 6$.

(c) $1 \to 1 - 2$ $\quad$ 1P. $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$ 1P.

$1 \to \frac{1}{2} \cdot 1$

$3 \to \frac{1}{3} \cdot 3$

1P.

$$\left(E_3 \;\middle|\; \underbrace{\begin{array}{ccc} 3/2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4/3 & -2/3 & 1/3 \end{array}}_{= A^{-1}} \right)$$ 1P.