Lösung + Wertung

Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel
Grünrock

WS 2017/18
14.02.2018

1. Klausur zu Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (außer Stift und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Einfache Gleichungen und Ungleichungen)	10 Punkte
A3 (Skalarprodukt und euklidische Norm im $\mathbb{R}^3$)	5 Punkte
A4 (Determinanten und Inverse)	7 Punkte
A5 (Ein lineares Gleichungssystem)	10 Punkte
A6 (Zeilenumformungen und Elementarmatrizen)	7 Punkte
A7 (Eigenwerte und Eigenräume)	11 Punkte

Bei den Aufgaben 1,2,3,4 und 6 werden lediglich die (Teil-)Ergebnisse korrigiert. Es empfiehlt sich also im besonderen Maße, Rechen- und Übertragungsfehler zu vermeiden. Die Klausur gilt mit 24 (von 60 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Für $n \geq 3$ ist $n!$ stets durch 6 teilbar.
Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(b) Für die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ gilt die Identität $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(c) Zwischen dem arithmetischen Mittel $AM(x_1, \ldots, x_n)$ und dem geometrischen Mittel $GM(x_1, \ldots, x_n)$ positiver reeller Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ gilt stets die Ungleichung $GM(x_1, \ldots, x_n) \leq AM(x_1, \ldots, x_n)$.
Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(d) Zu jeder linearen Abbildung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ gibt es genau einen Vektor $a \in \mathbb{R}^n$, so dass $F(t) = ta$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.
Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(e) Sind $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $AB = 0$, so ist $A = 0$ oder $B = 0$.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

2. **(2+3+2+3 P.)** Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der nachstehenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

(a) $x^2 - 4x \leq 21$,

$\iff 0 \geq x^2 - 4x - 21 = (x+3)(x-7)$

$\iff -3 \leq x \leq 7$, also $\mathbb{L} = [-3, 7]$

Nullstellen richtig: 1P.
Intervall richtig: 1 (weiterer) P.

(b) $x^6 - 8x^4 + 16x^2 = 0$,

$\iff x^2(x^4 - 8x^2 + 16) = 0 \iff x = 0$ oder $(x^2-4)^2 = 0$

$\iff x = 0$ oder $x^2 = 4 \iff x \in \{-2, 0, 2\} = \mathbb{L}$

(Für jede richtige Lösung 1P.)

(c) $|2x - 1| \leq 5$,

Fallunterscheidung ($x \gtreqless \frac{1}{2}$) oder Graphenskizze

zeigt $\mathbb{L} = [-2, 3]$

(Wer nur die Randpunkte richtig angibt: 1P.)

(d) $\dfrac{x(x+1)}{|x-1|} = 2x$.

Offenbar ist $x = 0$ eine Lösung. Sonst:

$\iff x + 1 = 2|x-1| = \begin{cases} 2x - 2 & \text{falls } x \geq 1 \\ 2 - 2x & \text{" } x \leq 1 \end{cases}$

ergibt die weiteren Lösungen $\frac{1}{3}$ und 3.

Also: $\mathbb{L} = \{0, \frac{1}{3}, 3\}$

(Jede richtige Lösung 1P.)

3. **(2+2+1 P.)** Für die Vektoren $x = (1, 2, 2)^\top, y = (1, 0, -1)^\top$ und $z = (1, 1, 1)^\top$ berechne man

(a) $|x|^2$ und $|y|^2$, $\quad |x|^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9, \quad |y|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ (je 1P.)

(b) $\langle x, y\rangle$ und $\langle y, z\rangle$, sowie $\quad \langle x, y\rangle = 1 + 0 - 2 = -1, \quad \langle y, z\rangle = 1 + 0 - 1 = 0$ (je 1P.

(c) $\langle x + y, z\rangle$. $\quad x + y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \langle x + y, z\rangle = 2 + 2 + 1 = 5$ (1P.)

4. (4+3 P.) (a) Bestimmen Sie die Determinante det(A) für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 6 - 4 = 2$ 1P.

Was können Sie anhand von det(A) über die Invertierbarkeit von A aussagen? Bestimmen Sie, sofern möglich, A^{-1}.

Aus $\det(A) \neq 0$ folgt: A ist invertierbar. 1P.

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ 1P. $\underset{\text{hier}}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ 1P. ← recht.

(b) Berechnen Sie ferner die Determinanten der Matrizen

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

z.B. Sarrus

$\det(B) \underset{1P.}{=} 1 + 8 + 27 - 3 \cdot 6 = 18$ 1P.

und

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det(C) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ 1P.

5. (1+4+2+3 P.) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x \quad -2y \quad +z &= -2 \\ x \quad +y \quad +3z &= 10 \\ 2x \quad +2y \quad +2z &= 8 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ für dieses Gleichungssystem.

(b) Bringen Sie $(A|b)$ durch Zeilenoperationen des Typs ⓘ → ⓘ + λ ⓙ auf Zeilenstufenform. Geben Sie dabei an, welche Umformungen Sie durchführen.

(c) Berechnen Sie $\det(A)$. Welche Folgerung ergibt sich hieraus für die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$?

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$.

(a) $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 10 \\ 2 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right)$ (1P.)

(b) ② → ② − ① (1P.) und ③ → ③ − 2 · ②alt (1P.) ergeben

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \longleftarrow (1P.) \\ \longleftarrow (1P.) \end{array}$$

(c) $\det A = -12$ (1P.)
Das GlS. $Ax=0$ ist eindeutig lösbar. (1P)

(d) $-4z = -12$, also $z = 3$ (1P.)
$3y + 6 = 12$, also $y = 2$ (1P.)
$x - 4 + 3 = -2$, also $x = -1$ (1P.)

6. **(3+4 P.)** Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) Geben Sie die Matrizen $A_{\lambda,1}$, $A_{1\leftrightarrow 2}$ und A_{1+2} an, deren Multiplikation von links mit A (d.h.: A ist der zweite Faktor in diesem Matrixprodukt) bewirkt, dass

(i) die erste Zeile von A mit dem Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert wird,

(ii) die beiden Zeilen von A vertauscht werden,

(iii) die erste Zeile von A durch die Summe beider Zeilen ersetzt wird.

$$A_{\lambda,1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{1\leftrightarrow 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{1+2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{jé } (1\text{P.})$$

(b) Sind diese Matrizen invertierbar? Geben Sie gegebenenfalls die Inversen an.

Falls $\lambda = 0$: $A_{\lambda,1}$ ist nicht invertierbar. (1P.)

Falls $\lambda \neq 0$: $A_{\lambda,1}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1P.)

$A_{1\leftrightarrow 2}^{-1} = A_{1\leftrightarrow 2}$ (denn: $A_{1\leftrightarrow 2}^{2} = E_2$) (1P.)

$A_{1+2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1P.)

7. (4+3+4 P.) Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie hierfür das charakteristische Polynom $P_A(t)$.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(c) Berechnen Sie die Eigenräume zu den beiden kleinsten (von Ihnen ermittelten) Eigenwerten.

(a) $P_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$ 2P.

$= (1-t)^3 - (1-t)$ (Sarrus, oder entwickeln) 2P.

(b) $P_A(t) = 0 \iff 1-t = 0$ oder $(1-t)^2 - 1 = t^2 - 2t = t(t-2) = 0$

Also sind die EWe: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$.

(Jeder richtige EW ein P.)

(c) $E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R} \right\}$, erhält man aus der

Lösung von $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2P.

$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R} \right\}$

aus der Lösung von $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2P.