Lösung + Wertung

Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel
Grünrock

WS 2018/19
12.02.2019

1. Klausur zu Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (außer Stift und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Das geometrische Mittel)	8 Punkte
A3 (Einfache Gleichungen und Ungleichungen)	8 Punkte
A4 (Skalarprodukte im $\mathbb{R}^3$)	6 Punkte
A5 (Determinanten)	8 Punkte
A6 (Ein lineares Gleichungssystem)	10 Punkte
A7 (Matrixpotenzen)	10 Punkte

Bei den Aufgaben 1,2,3,4 und 5 werden lediglich die (Teil-)Ergebnisse korrigiert. Es empfiehlt sich also im besonderen Maße, **Rechen- und Übertragungsfehler** zu **vermeiden**. Die Klausur gilt mit 24 (von 60 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

1. Im Folgenden seien stets $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n \geq 2$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen stets richtig, und welche im allgemeinen falsch sind. (Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!)

(a) Ist die Determinante $\det(A) \neq 0$, so besitzt das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung.

Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(b) Genau dann ist $\det(AB) \neq 0$, wenn A und B regulär sind.

Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(c) Entsteht B aus A durch Vertauschung zweier Zeilen, so gilt $\det(A) + \det(B) = 0$.

Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(d) Genau dann ist $AB = 0$, wenn $A = 0$ oder $B = 0$ gilt.

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(e) Genau dann ist AB regulär, wenn BA regulär ist.

Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

2. (1+2+2+3 P.)

(a) Geben Sie die Definition des geometrischen Mittels $GM(x_1, \ldots, x_n)$ für positive reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ an.

$$GM(x_1,\ldots,x_n) = \left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{\frac{1}{n}} \quad \left(\text{auch ok. ist: } \ldots = (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}\right)$$

(b) Nennen Sie zwei andere Formen der Mittelwertbildung - mit Angabe der Definition - , so dass eine davon stets größer oder gleich und die andere stets kleiner oder gleich dem geometrischen Mittel ist. $HM(x_1,\ldots,x_n) \le GM(x_1,\ldots,x_n) \le AM(x_1,\ldots,x_n)$

für $HM(x_1,\ldots,x_n) = \dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}$ und $AM(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$.

Alt.: $M_p \le GM$, falls $p<0$; $M_p \ge GM$, falls $p>0$, hierunter fällt auch $M_2 = QM$.

(c) Berechnen Sie das geometrische Mittel $GM(x_1, \ldots, x_5)$ für $x_k = 10^k$, wobei $1 \le k \le 5$.

$$GM(10, 100, \ldots, 100\,000) = 1000 \; (= 10^3)$$

(d) Stellen Sie allgemeiner eine - möglichst einfache - Formel für $GM(x_1, \ldots, x_n)$ auf, wenn die Zahlen x_k alle der Gestalt $x_k = a^k$ mit einem $a > 0$ sind. Bestimmen Sie in diesem Fall auch $\log_a(GM(x_1, \ldots, x_n))$, letzteres sollte unabhängig von a sein.

$$GM(a, a^2, \ldots, a^n) = \left(\prod_{k=1}^{n} a^k\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\sum_{k=1}^{n} k}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= a^{\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} k} = a^{\frac{n+1}{2}} \longrightarrow 2P.$$

und damit $\log_a(GM(\ldots)) = \dfrac{n+1}{2}$ $\longrightarrow$ 1P.

3. **(3+2+2+1 P.)** Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der nachstehenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

(a) $x^3 - 4x = 0$,

$\mathbb{L} = \{0, \pm 2\}$, für jede richtige Lösung 1 P.

(b) $e^{(2+\ln(x))} = 3e^2$, $\mathbb{L} = \{3\}$,

(da $e^{(2+\ln(x))} = e^2 \cdot e^{\ln(x)} = e^2 \cdot x$)

(c) $|3 - x| \leq 6$, $\mathbb{L} = [-3, 3] \cup [3, 9] = [-3, 9]$

(Hierbei erhält man die beiden Teilintervalle nach der Fallunterscheidung $x \gtreqless 3$; wer lediglich eines dieser Teilintervalle richtig angibt, erhält 1 P.; für einzelne korrekte Lösungen – z.B. $x = 0$ – gibt es keine Pkte.)

(d) $x^2 - 2x + 2 < 0$. $\mathbb{L} = \emptyset$;

(da $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$!)

4. **(3+3 P.)** Für die Vektoren $x = (3, 1, 2)^\top, y = (2, 3, 1)^\top$ und $z = (1, 3, 2)^\top$ berechne man

(a) $\langle x, y\rangle$, $\langle y, z\rangle$ und $\langle z, x\rangle$,

$\langle x\, y\rangle = \langle (3,1,2)^T, (2,3,1)^T\rangle = 3\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 1 = \underline{\underline{11}}$

$\langle y, z\rangle = 2 + 9 + 2 = \underline{\underline{13}}$

$\langle z, x\rangle = 3 + 3 + 4 = \underline{\underline{10}}$

(b) $\langle x + y, x - y\rangle$, $\langle y + z, y - z\rangle$ und $\langle x - z, x - z\rangle$

$\langle x + y, x - y\rangle = |x|^2 - |y|^2 = \underline{\underline{0}}$

$\langle y + z, y - z\rangle = \underline{\underline{0}}$

$\langle x - z, x - z\rangle = |x - z|^2 = |(2, -2, 0)^T|^2 = \underline{\underline{8}}$

Auch hier: Ergebnis korrekt!

5. ~~(1+2+2 P.)~~ (1+2+2) + (1+2) P.

(a) Berechnen Sie die Determinanten der nachstehenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 6\cdot 6 - 7\cdot 5 = 36 - 35 = \underline{\underline{1}}$

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach der Sarrus-Regel ist

$\det(B) = 0 + 1^3 + 2^3 - 0 - 0 - 0 = 1 + 8 = \underline{\underline{9}}$

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

„Kästchensatz": $\det(C) = \det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (-9)\cdot(-4)$

$= \underline{\underline{36}}$. (Alternativ: Vertauschung der ersten beiden und letzten beiden Spalten bringt je einen Vorzeichenwechsel, ändert also nicht die det. Dann: Produkt über die Diagonale!)

(b) Geben Sie den Determinantenmultiplikationssatz an!

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Als Anwendung berechne man die Determinante $\det(A)$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit der Eigenschaft: Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $A^N = 0$.

$0 = \det(0) = \det(A^N) = \det(A)^N \Longrightarrow \det(A) = 0.$

6. **(1+6+3 P.)** Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 4y + 7z &= 1 \\ 2x + 5y + 8z &= 2 \\ 3x + 6y + 9z &= 3 \end{aligned}$$

(a) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ dieses Systems an.

(b) Bringen Sie $(A|b)$ durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform. Geben Sie dabei (in Kurzschreibweise) die von Ihnen verwendeten Zeilenoperationen an.

(c) Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen des obigen linearen Gleichungssystems.

(a)

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \underline{1P.}$$

(b)

1P. $\to$ ② $\to$ ② $- 2$ ①

1P. $\to$ ③ $\to$ ③ $- 3$ ①

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right)$$

← 1P, wenn richtig
← 1P, " "

1P. $\to$ ③ $\to$ ③ $- 2\cdot$ ② und

② $\to \frac{1}{-3}\cdot$ ②

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longleftarrow 1P.$$

(Normierung ist in der Aufgabenstellung nicht gefordert!)

(c) ② liefert $y = -2z \longrightarrow 1P.$

① mit dem Teilergebnis aus ② ergibt

$x + 4y + 7z = x - 8z + 7z = x - z = 1$, d.h. $x = z + 1 \longrightarrow 1P.$

und also $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} z+1 \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R} \right\} \longrightarrow 1P.$

7. **(5+1+2+2 P.)** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Potenzen A^0, A^2 und A^3.

(b) Geben Sie die Inverse von A an. (Wenn Sie in (a) richtig gerechnet haben, können Sie A^{-1} dort ablesen.)

(c) Bestimmen Sie $\det(A)$.

(d) Interpretieren Sie A als Übergangsmatrix, so dass für $n \in \mathbb{N}_0$ und Marktverteilungsvektoren $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})^\top \in \mathbb{R}^3$ gilt $x^{(n+1)} = Ax^{(n)}$. Ausgehend von $x^{(0)} = (0, 2, 3)^\top$ bestimme man $x^{(1)}$ und $x^{(100)}$.

(a) $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ (= E_3)$ $\longrightarrow$ 1P.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ 2P.

(Ist nur ein Eintrag f., gibt's noch 1P.)

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ 2P.

(b) $A^{-1} = A^2$ wie oben angegeben $\longrightarrow$ 1P.

(c) $1 = \det(E_3) = \det(A^3) = \det(A)^3 \Rightarrow \det(A) = 1$ $\longrightarrow$ 2P.

(Ist das Ergebnis f., aber die Rechnung (z.B. mit Sarrus) richtig begonnen, gibt's nur noch 1P.)

(d) $x^{(1)} = Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ 1P.

$x^{(100)} = A^{100}x^{(0)} = A^{99}x^{(1)} = x^{(1)}$, da $A^{99} = E_3^{33} = E_3$. $\longrightarrow$ 1P.