Lösung

und

Wertung

Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
APL. PROF. DR. AXEL
GRÜNROCK

WS 2021/22
08.02.2022

1. Klausur zu Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Bitte die nächsten beiden Zeilen unbedingt ausfüllen!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (außer Stift und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Einfache Gleichungen)	10 Punkte
A3 (Einfache Ungleichungen)	11 Punkte
A4 (Skalarprodukte im $\mathbb{R}^4$)	6 Punkte
A5 (Inversion einer Dreiecksmatrix)	5 Punkte
A6 (Determinanten)	8 Punkte
A7 (Ein lineares Gleichungssystem)	10 Punkte

In Aufgabe 1 sollen Sie entscheiden, ob die vorgelegten mathematischen Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie dies bitte in den dafür vorgesehenen Kreisen auf Seite 3 an. Bei den Aufgaben 2 bis 6 werden lediglich die Ergebnisse korrigiert. Es empfiehlt sich also im besonderen Maße, **Rechen- und Übertragungsfehler zu vermeiden. Tragen Sie Ihre Ergebnisse zu diesen Aufgaben bitte auf S. 2 ein. Diese Einträge sind maßgeblich für die Korrektur!** Bei Aufgabe 7 wird auch der Rechenweg bewertet. Die Klausur gilt mit 24 (von 60 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2-6	7	Σ	Note
Punkte/Note					

Lös. Aufg. 2 (a) $\mathbb{L} = \{2, 5\}$	(b) $\mathbb{L} = \{\frac{5}{4}\}$		/2+2P.
(c) $\mathbb{L} = [0, 7]$	(d) $\mathbb{L} = \{27\}$		/3+3P.
Lös. Aufg. 3 (a) $\mathbb{L} = (-\infty, 3]$	(b) $\mathbb{L} = [3, 5]$		/2+3P.
(c) $\mathbb{L} = (-1, 2) \cup (4, \infty)$	(d) $\mathbb{L} = [-8, 7) \cup [8, \infty)$		/3+3P.
Lös. Aufg. 4 (a) $\lvert x\rvert^2 = 14$	$\lvert z\rvert^2 = 12$		/ 2P.
(b) $\langle x, y\rangle = 8$	$\langle y, z\rangle = 6$		/ 2P.
(c) $\langle x+y, x-y\rangle = 0$	$\langle x+z, y\rangle = 14$		/ 2P.
Lös. Aufg. 5 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & -\frac{1}{b} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$			/ 5P.
Lös. Aufg. 6 (a) $\det A = -2$			/ 2P.
Lös. Aufg. 6 (b) $\det B = 0$			/ 3P.
Lös. Aufg. 6 (c) $\det C = 4$			/ 3P.
		$\Sigma =$	

1. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen stets richtig, und welche im allgemeinen falsch sind. (Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!)

   (a) Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $\det(A) \neq 0$ genau dann, wenn die Gleichung $Ax = b$ für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ besitzt.

   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (b) Die Matrix B entstehe aus A durch Vertauschung zweier Zeilen. Dann ist $\det(A + B) = 0$.

   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (c) Die Matrix B entstehe aus A durch Vertauschung zweier Zeilen. Dann ist $\det(A)+\det(B) = 0$.

   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (d) Ist A regulär und A^{-1} eine linke untere Dreiecksmatrix, so ist A eine rechte obere Dreiecksmatrix.

   Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (e) Es sei A eine Matrix mit $A^2 = E$ (E bezeichne die Einheitsmatrix). Dann ist $\det(A) = 1$.

   Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

2. **(2+2+3+3 P.)** Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der nachstehenden Gleichungen:

(a) $x^2 - 7x + 10 = 0$. (Die Lösungen in (a) sind ganzzahlig. Das sollte an Ihrem Ergebnis ablesbar sein.)

$$x \in \left\{ \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} \right\} = \left\{ \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \right\} = \left\{ \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2} \right\} = \{2, 5\} = \mathbb{L}$$

(b) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 2$,

$$\Rightarrow \quad x + 1 + 2\sqrt{x^2 - 1} + x - 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad x + \sqrt{x^2 - 1} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 - 1} = 2 - x$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{4}$$

Einsetzen zeigt: Ist tatsächlich eine Lösung, also

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{5}{4} \right\}$$

(c) $|x - 7| = 7 - |x|$,

Wenn $x \geq 7$: $x - 7 = 7 - x \Leftrightarrow x = 7$

〃 $0 \leq x \leq 7$: $7 - x = 7 - x$, gilt $\forall x \in [0, 7]$

〃 $x < 0$: $7 - x = 7 + x$: keine weitere Lösung.

$\rightsquigarrow \quad \mathbb{L} = [0, 7]$

(d) $3\ln(2x) - 2\ln(3x) = \ln(24)$. $\Leftrightarrow \ln\left(\frac{(2x)^3}{(3x)^2}\right) = \ln(24)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{8}{9} x = 24 \quad \Leftrightarrow \quad x = 27$$

Vergessen Sie nicht, Ihre Ergebnisse auf S. 2 einzutragen!

3. **(2+3+3+3 P.)** Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der nachstehenden Ungleichungen:

(a) $e^{x-2} \leq e^{4-x}$, $\iff x-2 \leq 4-x \iff 2x \leq 6 \iff x \leq 3$

also $\mathbb{L} = (-\infty, 3]$

(b) $(x-3)^2 \leq 2x-6$, $\iff x^2 - 6x + 9 \leq 2x - 6$

$\iff x^2 - 8x + 15 \leq 0 \iff (x-3)(x-5) \leq 0$

$\iff 3 \leq x \leq 5$, also $\mathbb{L} = [3,5]$

(c) $(x+1)(x-2)(x-4) > 0$, $\iff \underset{+++}{x > 4}$ oder $\underset{+--}{-1 < x < 2}$,

also $\mathbb{L} = (-1, 2) \cup (4, \infty)$

(d) $\dfrac{15}{x-7} \leq x+7$.

wenn $x > 7$: $\iff 15 \leq x^2 - 49 \iff 64 \leq x^2 \iff x \geq 8$

wenn $x < 7$: $\iff 15 \geq x^2 - 49 \iff 64 \geq x^2 \iff x \geq -8$

also $\mathbb{L} = [-8, 7) \cup [8, \infty)$

Vergessen Sie nicht, Ihre Ergebnisse auf S. 2 einzutragen!

4. **(2+2+2 P.)** Für die Vektoren $x = (0, 1, 2, 3)^\top, y = (1, 2, 3, 0)^\top$ und $z = (2, 2, 0, 2)^\top$ berechne man

(a) $|x|^2$ und $|z|^2$,

$|x|^2 = 0 + 1 + 4 + 9 = 14 \quad (= |y|^2)$

$|z|^2 = 4 + 4 + 0 + 4 = 12$

(b) $\langle x, y \rangle$ und $\langle y, z \rangle$,

$\langle x, y \rangle = 0 + 2 + 6 + 0 = 8$

$\langle y, z \rangle = 2 + 4 + 0 + 0 = 6$

(c) $\langle x + y, x - y \rangle$ und $\langle x + z, y \rangle$.

$\langle x + y, x - y \rangle = |x|^2 - |y|^2 = 0$

$\langle x + z, y \rangle = \langle (2, 3, 2, 5), (1, 2, 3, 0) \rangle$

$= 2 + 6 + 6 = 14$

5. **(5 P.)** Es seien $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und

$$A := \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie A^{-1}.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & x & y \\ 0 & \frac{1}{b} & z \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$ 2P.

Zeile (2) von A^{-1} · Spalte (3) von A ergibt

$\frac{c}{b} + z \cdot c = 0$, d. h. $z = -\frac{1}{b}$ 1P.

Zeile (1) von A^{-1} · Spalte (2) von A gibt

$\frac{b}{a} + bx = 0$, d. h. $x = -\frac{1}{a}$ 1P.

Zeile (1) von A^{-1} · Spalte (3) von A:

$\frac{c}{a} + cx + cy = 0 \overset{x = -\frac{1}{a}}{\Longrightarrow} y = 0$ 1P.

6. **(2+3+3 P.)** Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(a) $\det A = 5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 = -2$

(b) Durch die Zeilenumformungen $② \to ② - 2 \cdot ①$ und $③ \to ③ - 3 \cdot ①$ geht B über in $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$. Also

$\det B = \det \tilde{B} = 0$ (Zwei identische Zeilen in $\tilde{B}$!)

(c) Der „Kästchensatz" ergibt

$$\det C = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (4-6)(18-20)$$

$$= (-2)(-2) = 4.$$

7. **(1+6+3 P.)** Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 10 \\ 4x + 3y + 2z &= 20 \\ 3x + 4y + 5z &= 22 \end{aligned}$$

(a) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ dieses Systems an.

(b) Bringen Sie $(A|b)$ durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform. Geben Sie dabei (in Kurzschreibweise) die von Ihnen verwendeten Zeilenoperationen an.

(c) Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen des obigen linearen Gleichungssystems.

(a)

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 3 & 2 & 20 \\ 3 & 4 & 5 & 22 \end{array}\right) \qquad 1P.$$

(b)

$② \to ② - 4 \cdot ①$ (1P)

$③ \to ③ - 3 \cdot ①$ (1P)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 0 & -2 & -4 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow 1P \\ \leftarrow 1P. \end{array}$$

$③ \to ③ - \frac{2}{5} \cdot ②$ (1P)

(optional : $② \to -②$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 1P. \end{array}$$

(c) z ist frei wählbar $\to$ 1P.

$\frac{1}{5} \cdot ②$: $y + 2z = 4 \Rightarrow y = 4 - 2z \to$ 1P

$①$: $x + 2(4-2z) + 3z = 10 \Rightarrow x = 2 + z \longrightarrow$ 1P.

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2+z \\ 4-2z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R} \right\}.$$