24.09.21

Tutorium zur Numerik I

1. Numerik-Klausur 2021

A1 (1) falsch

(2) "Gegeben $[a,b]$ und $n \in \mathbb{N}$ sind die Knoten einer Interpol.-QF mit $n+1$ Knoten zu $w(x) \equiv 1$ eindeutig bestimmt" falsch

(3) falsch

(4) richtig

(5) richtig

(6) falsch

(7) falsch

(8) richtig

(9) falsch

(10) falsch

A2 Stützpunkte $(-1,-1)$, $(0,1)$, $(1,7)$, $(2,29)$

Newton-Darst.

$$\begin{array}{lllll}
x_0 = -1 & [x_0]f = -1 & & & \\
 & & \frac{1+1}{0+1} = 2 & & \\
x_1 = 0 & [x_1]f = 1 & & \frac{6-2}{1+1} = 2 & \\
 & & \frac{7-1}{1-0} = 6 & & \frac{8-2}{2+1} = 2 \\
x_2 = 1 & [x_2]f = 7 & & \frac{22-6}{2-0} = 8 & \\
 & & \frac{29-7}{2-1} = 22 & & \\
x_3 = 2 & [x_3]f = 29 & & &
\end{array}$$

$$\Rightarrow p_3(x) = \sum_{j=0}^{3} [x_0, \dots, x_j]f \; w_j(x)$$

$$= -1 + 2(x+1) + 2(x+1)x + 2(x+1)x(x-1)$$

[Alternativ:

$$p_3(x) = -1 + (x+1)[2 + x(2 + (x-1)\cdot 2)) = \dots = 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$]

A3 $x_0, \dots, x_n$ paarw. versch.

Beh: $$[x_0, \dots, x_n]f = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\prod_{\substack{s=0 \\ s\neq k}}^{n} (x_k - x_s)}$$

Newton: $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} [x_0, \dots, x_j]f \, w_j(x)$ mit $w_j(x) = \prod_{k=0}^{j-1}(x - x_k)$

hat den führenden Koeff. $[x_0, \dots, x_n]f$

Lagrange: $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, l_{jn}(x)$ mit $l_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$

hat den führenden Koeff. $\sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{1}{x_j-x_k}$

Aus der Eindeutigkeit der Interpol. polynome folgt die Eindeutigkeit des führenden Koeff. und somit die Beh.

A4 Intervall $[0,1]$, $w(x) \equiv x$, Hauptkoeff 1, Orth. polynome

i) Aufgrund der geforderten Normiertheit folgt $\boxed{p_0(x) \equiv 1}$

ii) Für ein $a \in \mathbb{R}$ gilt $p_1(x) = x + a$

Man betrachte das gew. Skalarprodukt $\langle f,g\rangle_w := \int_0^1 f(x)\, g(x)\, w(x)\, dx$

Nach Vor. muss $\langle p_0, p_1\rangle_w = 0$ gelten, also

$$0 \overset{!}{=} \langle p_0, p_1\rangle_w = \int_0^1 p_0(x) p_1(x)\, w(x)\, dx = \int_0^1 1\cdot(x+a)x\, dx$$

$$= \int_0^1 x^2 + ax\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} \overset{!}{=} -\frac{1}{3} \Rightarrow a \overset{!}{=} -\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{p_1(x) = x - \frac{2}{3}}$$

iii) Für spezielle $b, c \in \mathbb{R}$ gilt $p_2(x) = x^2 + bx + c$

Nach Vor. muss $\langle p_0, p_2\rangle_w = 0$ und $\langle p_1, p_2\rangle_w = 0$ gelten, also

$$0 \overset{!}{=} \langle p_0, p_2\rangle_w = \int_0^1 (x^2+bx+c)x\, dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow c \overset{!}{=} -\frac{1}{2} - \frac{2b}{3} \quad (*)$$

$$0 \overset{!}{=} \langle p_1, p_2\rangle_w = \int_0^1 (x - \tfrac{2}{3})(x^2+bx+c)x\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^3 + bx^2 + cx - \tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{2b}{3}x - \tfrac{2}{3}c\right)x\, dx$$

$$= \int_0^1 x^4 + bx^3 + cx^2 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{2b}{3}x^2 - \tfrac{2}{3}cx\, dx$$

$$= \int_0^1 x^4 + (b - \tfrac{2}{3})x^3 + (c - \tfrac{2b}{3})x^2 - \tfrac{2}{3}cx\, dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} + (b-\tfrac{2}{3})\frac{x^4}{4} + (c - \tfrac{2b}{3})\frac{x^3}{3} - \frac{\cancel{2}c}{3}\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{b}{4} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \cancel{\frac{c}{3}} - \frac{2b}{9} - \cancel{\frac{c}{3}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{9})b$$

$$= \frac{6-5}{30} + \frac{9-8}{36}b = \frac{1}{30} + \frac{b}{36}$$

$$\Rightarrow b \overset{!}{=} 36 \cdot \frac{-1}{30} = -\frac{6}{5} \quad \overset{(*)}{\Rightarrow} c = -\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{-6}{5} = \frac{-5}{10} + \frac{8}{10} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_2(x) = x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}}$$

A5 $\min \|Ax-b\|_2^2$ mit $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\\2&-2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}15\\0\\0\end{pmatrix}$

Normalengl. $A^TAx=A^Tb$

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\\2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-3\\-3&6\end{pmatrix}$$

$$A^Tb=\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-15\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}9&-3\\-3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-15\end{pmatrix}$$

Cramer'sche Regel: $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

1. Alternative:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-3\\-3&6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}15\\-15\end{pmatrix}=\frac{1}{45}\begin{pmatrix}6&3\\3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\-15\end{pmatrix}=\frac{1}{45}\begin{pmatrix}45\\-2\cdot 45\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

2. Alternative

$$\left(\begin{array}{cc|c}9&-3&15\\-3&6&-15\end{array}\right)_{+\frac{1}{3}I}\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cc|c}9&-3&15\\0&5&-10\end{array}\right)_{:5}^{:3}\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cc|c}3&-1&5\\0&1&-2\end{array}\right)^{+II}\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cc|c}3&0&3\\0&1&-2\end{array}\right)^{:3}$$

$$\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&-2\end{array}\right)\Rightarrow x=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

3. Alternative

$$\begin{cases}9x_1-3x_2=15 & (I)\\ -3x_1+6x_2=-15 & (II)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}(I)/3:\ 3x_1-x_2=5 \Rightarrow x_2=3x_1-5 \quad (*)\\ \Rightarrow (II)/3:\ -5=-x_1+2x_2\overset{(*)}{=}-x_1+2(3x_1-5)=5x_1-10\\ \overset{\cdot 1/5}{\Rightarrow} -1=x_1-2 \Rightarrow x_1=1 \overset{(*)}{\Rightarrow} x_2=3-5=-2\end{array}\right\}\Rightarrow x=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

4. Alternative

Cholesky: $\begin{pmatrix}9&-3\\-3&6\end{pmatrix}_{+\frac{1}{3}I}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}9&-3\\0&5\end{pmatrix}=:R$, $D:=\begin{pmatrix}9&0\\0&5\end{pmatrix}$

$$L:=R^TD^{-1}=\begin{pmatrix}9&0\\-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/9&0\\0&1/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1/3&1\end{pmatrix};$$

$$\tilde{L}:=LD^{1/2}=\begin{pmatrix}1&0\\-1/3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&\sqrt{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\-1&\sqrt{5}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^TAx=A^Tb \Leftrightarrow \tilde{L}\underbrace{\tilde{L}^Tx}_{=:y}=A^Tb$$

$$\tilde{L}y=A^Tb \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3&0\\-1&\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3y_1\\-y_1+\sqrt{5}y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-15\end{pmatrix}\quad \left.\begin{array}{l}\Rightarrow y_1=5\\ \Rightarrow y_2=\frac{-10}{\sqrt{5}}\end{array}\right\}\Rightarrow y=\begin{pmatrix}5\\-\frac{10}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

$$\tilde{L}^Tx=y \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3&-1\\0&\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1-x_2\\\sqrt{5}x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-10/\sqrt{5}\end{pmatrix}\quad \left.\begin{array}{l}\Rightarrow x_1=\frac{5-2}{3}=1\\ \Rightarrow x_2=\frac{-10}{5}=-2\end{array}\right\}\Rightarrow x=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

A6 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2 + \frac{3}{4}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(-x^2 - y^2 + 1\right) \end{cases}$; $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; Beh. Lsg. eind.

Um den Banach'schen Fixpunktsatz anwenden zu können, wird $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ ausgestattet. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ ist ein vollständiger metrischer Raum

Man betrachte die Abb. $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F\binom{x}{y} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + \frac{3}{4}) \\ \frac{1}{2}(-x^2 - y^2 + 1) \end{pmatrix}$

Für $|x|, |y| \leq \frac{1}{2}$ gilt $\left|\frac{1}{2}(x^2 - y^2 + \frac{3}{4})\right| = \frac{1}{2}\underbrace{\left|\underbrace{x^2}_{\leq \frac{1}{4}} \underbrace{- y^2 + \frac{3}{4}}_{\geq 0}\right|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{2}$ und

$$\left|\frac{1}{2}(-x^2 - y^2 + 1)\right| = \frac{1}{2}\underbrace{\left|\underbrace{-x^2}_{\geq 0} \underbrace{-y^2 + 1}_{\geq 0}\right|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{2}$$

Somit bildet F die Menge $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ in sich selbst ab, es handelt sich bei F also um eine Selbstabbildung.

Um zu begründen, dass F auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ eine Kontraktion ist, genügt es nach dem MWS zu zeigen, dass $\|DF\|_2 < 1$ auf $(x, y) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$.

$$DF\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} x & -y \\ -x & -y \end{pmatrix}$$

$$\|DF\|_2^2 = DF\binom{x}{y}^T DF\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} x & -x \\ -y & -y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -y \\ -x & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2 & 0 \\ 0 & 2y^2 \end{pmatrix}$$

hat EW $2x^2$ und $2y^2$

Für $\binom{x}{y} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ ist $\max\{|2x^2|, |2y^2|\} \leq \frac{1}{2}$, also ist $\|DF\binom{x}{y}\|_2^2 \leq \frac{1}{2} < 1$, somit $\|DF\binom{x}{y}\|_2 < 1$ und F ist eine Kontraktion.

Somit sind alle Vor. des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt: Das GLS besitzt eine eindeutige Lösung.

1. Numerik-Klausur 2018

A1 a) $|h\sin(h)| = |h\cdot(h+\mathcal{O}(h^3))| = |h^2+\mathcal{O}(h^4)| \le C\cdot h^2$

$\Rightarrow f(h)=\mathcal{O}(h^p)$ für $h\to 0$ mit $p\in\{1,2\}$

b) $|\cos(h)-1+\frac{h^2}{2}-4h^5| = |\cancel{1}-\cancel{\frac{h^2}{2}}+\mathcal{O}(h^4)-\cancel{1}+\cancel{\frac{h^2}{2}}| \le C\cdot h^4$

$\Rightarrow f(h)=\mathcal{O}(h^p)$ für $h\to 0$ mit $p\in\{1,2,3,4\}$

c) $f(h)=\mathcal{O}(h^p),\ h\to 0 \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \exists c,\varepsilon>0: |f(h)|\le c|h^p|\ \forall h$ mit $|h|<\varepsilon$

$$\overset{\substack{f(h)>0\ \forall h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\\ f(|h|)=f(h)}}{\Longleftrightarrow} \exists c,\varepsilon>0: f(z)\le c\,z^p\ \forall z \text{ mit } z\in]0,\varepsilon[$$

$$\Longleftrightarrow \exists c,\varepsilon>0: \frac{f(z)}{z^p}\le c \quad \forall z \text{ mit } z\in]0,\varepsilon[$$

Wenn $\lim\limits_{z\downarrow 0}\frac{f(z)}{z^p} = \lim\limits_{z\downarrow 0}\frac{\exp(-1/z)}{z^p} \overset{y:=\frac{1}{z}}{=} \lim\limits_{y\to\infty}\frac{e^{-y}}{y^{-p}} = \lim\limits_{y\to\infty}\frac{y^p}{e^y}$

$$\overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{y\to\infty}\frac{p\,y^{p-1}}{e^y} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \dots = \lim_{y\to\infty}\frac{p\cdot(p-1)\cdot\ldots\cdot 1\,y^0}{e^y} = \lim_{y\to\infty}\frac{p!}{e^y} = 0$$

$\Rightarrow f(h)=\mathcal{O}(h^p)$ für $h\to 0$ mit $p\in\mathbb{N}$ beliebig

A2 a) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $p_f\in\mathbb{P}_2$, $x_0=\frac{1}{6}$, $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{2}{3}$, Newton

$$\begin{array}{lllll}
x_0=1/6 & f(x_0) & & & \\
 & & \frac{f(x_1)-f(x_0)}{1/2-1/6}=3(f_1-f_0) & & \\
x_1=1/2 & f(x_1) & & \frac{6f_2-9f_1+3f_0}{2/3-1/6}=12f_2-18f_1+6f_0 & \\
 & & \frac{f(x_2)-f(x_1)}{2/3-1/2}=6(f_2-f_1) & & \\
x_2=2/3 & f(x_2) & & &
\end{array}$$

$p_f(x) = f(x_0)+3(f(x_1)-f(x_0))](x-\frac{1}{6})+(12f(x_2)-18f(x_1)+6f(x_0))(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})$

b) interpol. QF Q_2 auf $[0,1]$, (Ordnung?) Exaktheitsgrad

$Q_2(f)=\sum\limits_{i=0}^{2}a_i f(x_i) = \int_0^1 p_f(x)\,dx$

$$\overset{a)}{=} \int_0^1 (2-7x+6x^2)f(x_0)+(-2+15x-18x^2)f(x_1)+(1-8x+12x^2)f(x_2)\,dx$$

$$= [2x-\tfrac{7x^2}{2}+\tfrac{6x^3}{3}]_0^1 f(x_0) + [-2x+\tfrac{15x^2}{2}-\tfrac{18x^3}{3}]_0^1 f(x_1) + [x-\tfrac{8x^2}{2}+\tfrac{12x^3}{3}]_0^1 f(x_2)$$

$$= (\tfrac{4}{2}-\tfrac{7}{2}+\tfrac{4}{2})f(x_0) + (\tfrac{-4}{2}+\tfrac{15}{2}-\tfrac{12}{2})f(x_1) + (1-\cancel{4}+\cancel{4})f(x_2)$$

$$= \tfrac{1}{2}f(x_0)-\tfrac{1}{2}f(x_1)+f(x_2)$$

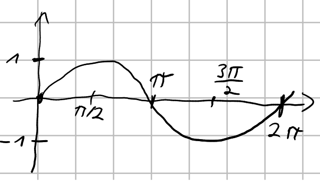
Da es sich um eine interpol. QF mit drei Stützstellen handelt, hat Q_2 mindestens Exaktheitsgrad 2.

c) Verwende Q_2 um $\int_0^1 x\sin(3\pi x)\,dx$ zu approximieren

$\int_0^1 x\sin(3\pi x)\,dx \approx Q_2(x\sin(3\pi x))$

$$= \tfrac{1}{2}x_0\sin(3\pi x_0)-\tfrac{1}{2}x_1\sin(3\pi x_1)+x_2\sin(3\pi x_2)$$

$$= \tfrac{1}{12}\underbrace{\sin(\tfrac{\pi}{2})}_{=1}-\tfrac{1}{4}\underbrace{\sin(\tfrac{3\pi}{2})}_{-1}+\tfrac{2}{3}\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} = \tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{4} = \tfrac{4}{12} = \tfrac{1}{3}$$



A3 natürlicher kubischer Spline durch

x_i	0	1	3	4
y_i	52	33	3	-16

$h_j := x_j - x_{j-1} \Rightarrow h_1 = 1,\ h_2 = 2,\ h_3 = 1$

$\mu_j := \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}} \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3},\quad \mu_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$

$\lambda_j := \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3},\quad \lambda_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 52 & & & & & & \\
 & & \frac{33-52}{1-0} = -19 & & & & & \\
1 & 33 & & & 4/3 & & & \\
 & & \frac{3-33}{3-1} = -15 & & & & -8/12 & \\
3 & 3 & & & -4/3 & & & \\
 & & \frac{-16-3}{4-3} = -19 & & & & & \\
4 & -16 & & & & & &
\end{array}$$

Natürliche Splines: $M_0 = M_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} [x_0,x_1,x_2]f \\ [x_1,x_2,x_3]f \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2/3 \\ 2/3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 4/3 \\ -4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix}(i)\\(ii)\end{matrix}$$

(i) $6M_1 + 2M_2 = 24 \Rightarrow M_2 = 12 - 3M_1 \quad (i')$

(ii) $2M_1 + 6M_2 \overset{(i')}{=} 2M_1 + 6(12 - 3M_1) = 6\cdot 12 - 16M_1 \overset{!}{=} -24$

$\Rightarrow M_1 = \frac{6\cdot 12 + 24}{16} = \frac{\cancel{8}\cdot 12}{2\cdot \cancel{8}} = 6 \quad \overset{(i')}{\Rightarrow} M_2 = 12 - 3\cdot 6 = -6$

$\Rightarrow M_0 = 0,\ M_1 = 6,\ M_2 = -6,\ M_3 = 0$

$c_j := [x_{j-1}, x_j]f - \frac{h_j}{6}(M_j - M_{j-1})$

$\Rightarrow c_1 = -19 - \frac{1}{6}(6-0) = -19 - 1 = -20$

$c_2 = -15 - \frac{2}{6}(-6-6) = -15 + 4 = -11,\quad c_3 = -19 - \frac{1}{6}(0+6) = -19 - 1 = -20$

$d_j := f(x_{j-1}) - \frac{h_j^2}{6} M_{j-1}$

$\Rightarrow d_1 = 52 - \frac{1}{6}\cdot 0 = 52,\quad d_2 = 33 - \frac{2^2}{6}6 = 29,\quad d_3 = 3 - \frac{1}{6}(-6) = 4$

$I_j := [x_{j-1}, x_j] \Rightarrow I_1 = [0,1],\ I_2 = [1,3],\ I_3 = [3,4]$

$s(x)|_{I_j} = \frac{1}{h_j}\left(M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6} + M_{j-1}\frac{(x_j - x)^3}{6}\right) + c_j(x - x_{j-1}) + d_j$

$\Rightarrow s(x)|_{I_1} = 1\cdot\left(6\frac{(x-0)^3}{6} + 0\right) + (-20)(x-0) + 52 = x^3 - 20x + 52$

$s(x)|_{I_2} = \frac{1}{2}\left(-6\frac{(x-1)^3}{6} + 6\frac{(3-x)^3}{6}\right) + (-11)(x-1) + 29$

$= -\frac{1}{2}(x-1)^3 + \frac{1}{2}(3-x)^3 - 11(x-1) + 29$

$s(x)|_{I_3} = 1\left(0 + (-6)\frac{(4-x)^3}{6}\right) + (-20)(x-3) + 4 = -(4-x)^3 - 20(x-3) + 4$

A4 Interpol. QF $Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j),\ 0 \le x_0 < \ldots < x_n \le 1$ auf $[0,1]$

QF symm., d.h. $x_j = 1 - x_{n-j}$ und $a_j = a_{n-j}$ für $j \in \{0,\ldots,n\}$

a) Zeige: $f(x) = (x - \frac{1}{2})^{2k-1}$ mit $k \in \mathbb{N}$ wird exakt integriert

$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^{2k-1} dx = \left[\frac{1}{2k}(x - \frac{1}{2})^{2k}\right]_0^1 = \frac{1}{2k}(\frac{1}{2})^{2k} - \frac{1}{2k}(-\frac{1}{2})^{2k} = 0$

$$Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} a_j\left(x_j - \tfrac{1}{2}\right)^{2k-1} \overset{\text{symm.}}{=} \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\left(1 - x_{n-j} - \tfrac{1}{2}\right)^{2k-1} = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\left(\tfrac{1}{2} - x_{n-j}\right)^{2k-1}$$

$$= -\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\left(x_{n-j} - \tfrac{1}{2}\right)^{2k-1} \overset{l:=n-j}{=} -\sum_{l=0}^{n} a_l\left(x_l - \tfrac{1}{2}\right)^{2k-1} = -Q_n(f)$$

$a+b=b+a$

$$\Rightarrow Q_n(f) = 0 = \int_0^1 f(x)\,dx$$

b) Folgere: QF besitzt ungeraden Exaktheitsgrad

Ang, die QF besitzt den Exaktheitsgrad 2k-2 (gerade)

$f(x) = (x - \frac{1}{2})^{2k-1} = x^{2k-1} + r(x) \in \mathbb{P}_{2k-1}$ mit $r(x) \in \mathbb{P}_{2k-2}$.

Sei p ein beliebiges Polynom in $\mathbb{P}_{2k-1}$, dann ex. ein $\tilde{r}(x) \in \mathbb{P}_{2k-2}$ und ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $p(x) = cf(x) + \tilde{r}(x)$.

Da die QF den Exaktheitsgrad 2k-2 besitzt, wird $\tilde{r}(x) \in \mathbb{P}_{2k-2}$ exakt integriert. Wegen a) wird $f(x)$ also auch $cf(x)$ exakt integriert

$\Rightarrow$ alle $p \in \mathbb{P}_{2k-1}$ werden exakt integriert

$\Rightarrow$ Exaktheitsgrad $2k-1$ (ungerade)

A5 a) Finde P, L, R, sodass $PA = LR$ für $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -6 & 2 & 1 \\ 0 & 14 & 4 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -6 & 2 & 1 \\ 0 & 14 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 14 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +\frac{1}{2}I \\ \\ \end{matrix} \xrightarrow{L_1} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 1/2 \\ 0 & 14 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 0 & 14 & 4 \\ 0 & 7 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\frac{1}{2}II \end{matrix} \xrightarrow{L_1} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 0 & 14 & 4 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} =: R$$

mit $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1/2 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$

$$R = L_2 P_2 L_1 P_1 A = L_2 \overset{II,III}{P_2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1/2 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} P_1 A = L_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 1/2 & & 1 \end{pmatrix}}_{=:L_1^*} P_2 P_1 A$$

$$P := P_2 P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L := (L_2 L_1^*)^{-1} = (L_1^*)^{-1} L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ -1/2 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, zz: (1) $\det(Q) = \pm 1$ (2) $\|Q\|_2 = 1$

(1) $\det(Q)^2 = \det(Q)\det(Q) = \det(Q^T)\det(Q) = \det(Q^TQ) \overset{Q \text{ orth.}}{=} \det(I) = 1$

$\Rightarrow \det(Q) \in \{-1, +1\}$

(2) $Q^TQ \overset{Q \text{ orth.}}{=} I$ hat nur den vielfachen EW 1

$\Rightarrow \|Q\|_2 = \max\{\sqrt{|\lambda|} \mid Q^TQx = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$

$= \sqrt{|1|} = 1$

A6 Bestimme Wendepunkt für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^3(\mathbb{R})$

a) passende Iterationsvorschrift. Notw. Bed $f''(x) \stackrel{!}{=} 0$

$$x_{k+1} = x_k - (f'''(x_k))^{-1} f''(x_k) \text{ mit des Newton-Verfahrens}$$

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := c f(x) + d$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$

$$x_{k+1} = x_k - (g'''(x_k))^{-1} g''(x_k) = x_k - \cancel{\tfrac{1}{c}}(f'''(x_k))^{-1} \cdot \cancel{c} f''(x_k) = x_k - (f'''(x_k))^{-1} f''(x_k)$$

Beginnend mit demselben Startwert werden dieselben Iterierten erzeugt wie in a).

c) $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f(x) = e^x - \frac{e}{2}x^2$, $x_0 = 0$, zwei Schritte

$f'(x) = e^x - ex$, $f''(x) = e^x - e$, $f'''(x) = e^x$

$$x_1 = x_0 - \frac{f''(x_0)}{f'''(x_0)} = x_0 - \frac{e^{x_0} - e}{e^{x_0}} = 0 - \frac{1-e}{1} = e - 1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f''(x_1)}{f'''(x_1)} = x_1 - \frac{e^{x_1} - e}{e^{x_1}} = e - 1 - 1 + \frac{e}{e^{e-1}} = e - 2 + e\, e^{1-e}$$

$$= e - 2 + e^{2-e}$$