Tutorium zur Numerik I

23.09.21

Freitag, 24.09.21 :
- $10^{\underline{00}} - 11^{\underline{30}}$ Selbst. Bearb. der 1. Probeklausur
- $11^{\underline{30}} - 13^{\underline{00}}$ Besprechung der 1. PK
- $13^{\underline{00}} - 14^{\underline{30}}$ Selbst. Bearb. der 2. PK
- $14^{\underline{30}} - 16^{\underline{00}}$ Besprechung der 2. PK

5.2 Die QR-Zerlegung mittels Householder-Reflexion

Bem $w^T w = 1$, dann ist die Householdermatrix $Q := I - 2ww^T$ eine symmetrische $(Q^T = Q)$, orthogonale $(Q^T Q = I)$ Matrix.

Sie beschreibt eine Spiegelung an der Hyperebene $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid w^T x = 0\}$

Schema: $A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \frown \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \frown \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$

Vorgehensweise Haben $A^{(0)} := A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$

Für $i = 1, .., k$

1) $y := A^{(i-1)}[i:, i]$

2) $k := \begin{cases} -\operatorname{sign}(y_1) \|y\|, & y_1 \neq 0 \\ -\|y\|, & y_1 = 0 \end{cases}$; $|L| := \sqrt{\frac{1}{2}(\|y\| \cdot (\|y\| + |y_1|))}$

$w := \frac{1}{2|L|}(y - ke_1)$

3) $\tilde{Q}^{(i)} := I - 2ww^T$, $Q^{(i)} := \begin{pmatrix} 1 \cdot \cdot 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^{(i)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A^{(i)} := \tilde{Q}^{(i)} A^{(i-1)}[i:, i:]$

$Q := Q^{(1)} \cdot Q^{(2)} \cdot \ldots \cdot Q^{(k)}$, $R := Q^{(k)} \cdot Q^{(k-1)} \cdot \ldots \cdot Q^{(1)} A = Q^{(k)} A^{(k-1)}$

Bsp $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} =: A^{(0)}$

1. Spalte: $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $k = -\operatorname{sign}(y_1)\|y\| = -\sqrt{9} = -3$

$|L| = \sqrt{\frac{1}{2}\|y\|(\|y\| + |y_1|)} = \sqrt{\frac{1}{2} 3 (3 + 1)} = \sqrt{\frac{3}{2} 4} = \sqrt{6}$

$w = \frac{1}{2|L|}(y - ke_1) = \frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Q^{(1)} = I - 2ww^T = I - \frac{2}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^{(1)} = Q^{(1)} A^{(0)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -9 & -3 & 6 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 9 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

2. Spalte: $y = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $k = -(-1)\sqrt{16+9} = 5$, $|\kappa| = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 5(5+4)} = \sqrt{\frac{45}{2}}$

$$w = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{45}}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{9\cdot 5}}\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{Q}^{(2)} = I - \frac{2}{10}\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow Q^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$R = Q^{(2)}Q^{(1)}A^{(0)} = Q^{(2)}A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -12/5 \\ 0 & 0 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$Q = Q^{(1)}Q^{(2)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2/5 & -14/5 \\ -2 & -11/5 & 2/5 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(Probe: $Q^TQ = I$ und $QR = A$)

5.3 Die QR-Zerlegung mittels Givens-Rotation

$i<j$ Winkel zw. den Koord. i und j

$$G(i,j,\theta) = I - (1-\cos(\theta))e_ie_i^T - \sin(\theta)e_ie_j^T + \sin(\theta)e_je_i^T - (1-\cos(\theta))e_je_j^T)$$

$$= \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & I_{j-i-1} & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-j} \end{pmatrix}$$

$$G(i,j,\theta)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} x_k & , k \neq i \text{ und } k \neq j \\ x_i\cos\theta - x_j\sin\theta & , k = i \\ x_i\sin\theta + x_j\cos\theta & , k = j \end{cases}$$

Eigenschaften: (i) $G(i,j,\theta)\,G(i,j,\phi) = G(i,j,\theta+\phi)$

(ii) $G(i,j,\theta)^T = G(i,j,-\theta)$

(iii) $G(i,j,\theta)$ ist orthonormal

Schema: $A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$

Vorgehensweise:

1) Bestimme Spalte i und Zeile j ($i<j$) des zu eliminierenden Elements

2) Bestimme Matrix $G(i,j,\theta)$ mit

$$\cos(\theta) = \frac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}} \quad \text{und} \quad \sin(\theta) = -\frac{a_{ji}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}}$$

3) Berechne $A^{(k+1)} = G(i,j,\theta)\,A^{(k)}$,

dann weiter mit 1) bis $A^{(\tilde{k}+1)} = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ 0 & & * \end{pmatrix} =: R$

$$Q := G(i_1,j_1,\theta_1)^T \cdot G(i_2,j_2,\theta_2)^T \cdot \ldots \cdot G(i_{\tilde{k}},j_{\tilde{k}},\theta_{\tilde{k}})^T$$

Bsp

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$i=1,\ j=3,\quad \cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5},\quad \sin(\theta) = \frac{-4}{5}$

$$G(i,j,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = G(i,j,\theta)\,A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 7 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$i=2,\ j=3,\quad \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin(\theta) = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2}$

$$G(i,j,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = G(i,j,\theta)\,A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 & 7 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & (1+\sqrt{3})/2 \\ 0 & 0 & (1-\sqrt{3})/2 \end{pmatrix} =: R$$

$$Q := G(i_1,j_1,\theta_1)^T G(i_2,j_2,\theta_2)^T = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 & -4\sqrt{3}/10 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 4/5 & -3/10 & 3\sqrt{3}/10 \end{pmatrix}$$

(Probe: $QR = A,\ Q^TQ = I$)

5.4 Lösung lin GLS unter Verwendung der QR-Zerlegung

Für $A = QR$ gilt $Ax = b \iff QRx = b \iff Rx = Q^Tb$

Stabiler als mit LR-Zerlegung, aber doppelt so viele Operationen

5.5 Lineare Ausgleichsrechnung

Betrachte überbestimmtes lin. GLS $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$

Ausgleichsproblem: Minimiere $\|Ax-b\|_2$ (Residuum $r := Ax-b$)

Hat A maximalen Rang, d.h. $\operatorname{rank}(A) = n$, so A^TA symm. und posdef.

$(AB)^T = B^TA^T$

$$\left(\begin{array}{l} (A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA \implies A^TA \text{ ist symmetrisch} \\ x^TA^TAx = (Ax)^TAx = \|Ax\|_2^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \implies A^TA \succcurlyeq 0 \end{array}\right)$$

Zu minimieren ist also die quadratische Funktion

$$F(x) := \|Ax-b\|_2^2 = (Ax-b)^T(Ax-b) = x^TA^TAx - 2b^TAx + b^Tb$$

Notw. Bed: $\nabla F(x) \overset{A^TA \text{ symm.}}{=} 2A^TAx - 2A^Tb \overset{!}{=} 0 \implies A^TAx - A^Tb \overset{!}{=} 0$

$\implies$ Normalengleichung $A^TAx = A^Tb$

Da $A^TA \succ 0$, besitzt die Normalengl. eine eind. Lsg! Nutze z.B. Cholesky

Hinr. Bed: $\nabla^2 F(x) = 2A^TA \succ 0 \implies$ Minimum

x ist Lsg des Ausgleichsproblems $\iff$ x ist Lsg der Normalengl.

Def Bild $Im(A) := \{w \in \mathbb{R}^m \mid \exists v \in \mathbb{R}^n,\ w = Av\}$,

Kern $Ker(A) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0\}$

Es gilt $\mathbb{R}^m = Im(A) + Ker(A^T)$, orthogonales Komplement

$\mathbb{R}^n = Im(A^T) + Ker(A)$, $Im(A) = (Ker(A^T))^{\perp}$

$rank(A) = dim(Im(A))$

Satz Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $rank(A) = n$, $A = QR$ mit $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $R = \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $Q^T b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

x^* löst lin. Ausgleichsproblem $\forall x \in \mathbb{R}^n \iff \hat{R} x^* = y_1$

"Begründung": $Ax = b \iff QRx = b \iff Rx = Q^T b$

$\iff \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff \hat{R} x = y_1$

7. Übungseinheit

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Berechne vollst. QR-Zerlegung mittels Householder-Reflexion

b) Gib mithilfe von a) auch die reduzierte QR-Zerlegung an.

2) Berechne mittels Givens-Rotation die QR-Zerlegung für $A^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 3 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1) a) 1. Spalte: $y = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k = -1\sqrt{16+9} = -5$, $|\lambda| = \sqrt{\frac{5(5+4)}{2}} = \sqrt{\frac{45}{2}}$

$w = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{45}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{90}}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q^{(1)} = I - \frac{2}{90}\begin{pmatrix} 81 & 27 & 0 \\ 27 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} -36 & -27 & 0 \\ -27 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}$

$A^{(1)} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} -36 & -27 & 0 \\ -27 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} -225 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. Spalte: $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $k = -\|y\| = -3$, $|\lambda| = \sqrt{\frac{3(3+0)}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$w = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\tilde{Q}^{(2)} = I - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow Q^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$Q := Q^{(1)} Q^{(2)} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} -36 & -27 & 0 \\ -27 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} -36 & 0 & 27 \\ -27 & 0 & -36 \\ 0 & -45 & 0 \end{pmatrix}$

$$R := Q^{(2)}Q^{(1)}A = Q^{(2)}A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\tilde{Q} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} -36 & 0 \\ -27 & 0 \\ 0 & -45 \end{pmatrix}$ und $\tilde{R} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ erfüllen $\tilde{Q}\tilde{R} = A$

2) $A^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 3 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$i=1, j=2, \quad \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2}$

$$G(i,j,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = G(i,j,\theta)\, A^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 3 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$i=2, j=3, \quad \cos(\theta) = \frac{0}{\sqrt{0+4}} = 0, \quad \sin(\theta) = \frac{-2}{2} = -1$

$$G(i,j,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = G(i,j,\theta)\, A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: R$$

$$Q := G(i_1,j_1,\theta_1)^T G(i_2,j_2,\theta_2)^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6 Nichtlineare Gleichungen

Bestimmung von Nullstellen, lösen nichtlinearer Gleichungssysteme

6.1 Theoretische Grundlagen

Geg: $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abg.

Ges: NST, d.h. $f(x^*) = 0$

Äquivalentes Fixpunktproblem: $F(x^*) = x^* \iff f(x^*) = 0$

$\rightsquigarrow$ Iterationsverfahren $x_{k+1} = F(x_k)$

Def $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist Kontraktion, wenn $\exists \, \kappa < 1 : \|F(x) - F(y)\| \leq \kappa \|x-y\| \; \forall x,y$

Banach'scher Fixpunktsatz: Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter linearer Raum, $Y \subseteq X$ vollst., sei $F: Y \to Y$ Kontraktion.

Dann gibt es genau einen Fixpunkt y^*.

y^* bel. genau approximierbar, $(y_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ mit $y_{i+1} = F(y_i)$ konvergiert gegen y^*

a-priori-Abschätzung: $\|y^* - y_i\| \leq \frac{\kappa^i}{1-\kappa} \|y_0 - y_1\|$

a-posteriori-Abschätzung: $\|y^* - y_i\| \leq \frac{\kappa}{1-\kappa} \|y_i - y_{i-1}\|$

Def Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert x^* hat mind.
Konvergenzordnung $p \geq 1$, wenn
$\exists C > 0 : \|x_{i+1} - x^*\| \leq C \|x_i - x^*\|^p \; \forall i$
mit $C < 1$ falls $p = 1$ und $C < \infty$ sonst.

Bez: $p = 1$: lineare Konvergenz
$p = 2$: quadratische Konvergenz

superlineare Konvergenz, falls nichtneg. Nullfolge ex.,
$c_i \geq 0$, $c_i \xrightarrow{i\to\infty} 0$: $\|x_{i+1} - x^*\| \leq c_i \|x_i - x^*\|$ für $i \to \infty$.

6.2 Nichtlineare Gleichungen in einer Unbekannten

Bsp Das Bisektionsverfahlen konvergiert linear

Satz Sei F stetig diff'bare reellwertige Fkt auf $[a,b]$.
F kontrahierend in $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ Ableitung von F in $[a,b]$ dem Betrag nach kleiner als 1

Newton-Verfahren $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

- Ansatz: $x_{i+1} = F(x_i) = x_i - c(x_i) f(x_i)$, $F'(x^*) = 0 \Rightarrow c(x^*) = \frac{1}{f'(x^*)}$
- Bestimme Tangente von f im Punkt x_i,
  wähle x_{i+1} als Nullstelle dieser Tangente

Bsp $f(x) = 3x - 6$, $x_0 = 0$, $f'(x) = 3$, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{-6}{3} = 2$

Satz Sei $I \neq \emptyset$ offenes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'bar
mit $f'(x) \neq 0 \; \forall x \in I$. $x^* \in I$ erfülle $f(x^*) = 0$.
Dann ex $J \subseteq I$ abg. mit $x^* \in J$, sodass für das Newton-Verfahren
die Vor. für den Banach'schen Fixpunktsatz erfüllt sind
$\Rightarrow$ Jede Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ mit $x_0 \in J$ konvergiert gegen x^*

Bem Newton-Verfahren konvergiert gut, wenn x_0 nah an x^*:
lokale Konvergenz.

Satz Geg: Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, reellwertige p-mal stetig diff'bare Iterationsfunktion F mit Fixpunkt x^*.

Gilt $|F'(x^*)| < 1$ für $p=1$ und $F'(x^*) = \dots = F^{(p-1)}(x^*) = 0$, $F^{(p)}(x^*) \neq 0$ für $p > 1$, so konvergiert $x_{i+1} = F(x_i)$ lokal gegen x^* und hat die Ordnung p.

Korollar Sei x^* einfache NST von $f \in C^3(I, \mathbb{R})$, so konvergiert das Newton-Verfahren lokal gegen x^* und besitzt mindestens die Ordnung 2.

Sekantenmethode $x_{i+1} = x_i - f(x_i) \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$ mit $f(x_i) - f(x_{i-1}) \neq 0 \ \forall i$

- benötigen zwei Startwerte x_0, x_1, aber keine Ableitung von f
- Nullstelle der Sekante durch die Punkte $(x_i, f(x_i))$ und $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$
- Für $f'(x^*) \neq 0$ und $f''(x^*) \neq 0$ konvergiert die Sekantenmethode lokal ($p \approx 1.6$)

6.3 Das Newton-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme

Finde NST $f(x) = 0$ für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar

Taylorentwicklung:

$$0 = f(x^*) = f(x_i + (x^* - x_i)) = f(x_i) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Jacobimatrix}}}{Df(x_i)} (x^* - x_i) + o(\|x^* - x_i\|) \text{ für } x_i \to x^*$$

Ansatz: $0 = f(x_i) + Df(x_i)(x_{i+1} - x_i)$

$$\Rightarrow x_{i+1} = x_i - Df(x_i)^{-1} f(x_i)$$

Statt $Df(x_i)^{-1}$ zu berechnen, löse $Df(x_i) \Delta x_i = -f(x_i)$ mit $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$

Die Lösung eines nichtlin. GlS wurde auf die Lösung einer Folge von lin. GlS zurückgeführt

Auch für nichtlineare Systeme ist das Newton-Verfahren lokal quadratisch konvergent.

Satz Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$, $x^* \in U$ NST von f mit $\det(Df(x^*)) \neq 0$.

Dann ex. $\varepsilon > 0$, sodass $\forall x_0 \in B_\varepsilon(x^*) \cap U$ das Newton-Verfahren durchführbar und konvergent ist. Für die Iterierten gilt $\|x^* - x_{k+1}\| \leq c \|x^* - x_k\|^2$ mit $c \geq 0$.

Bsp $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$, suche kritische Stellen!

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2-3y \\ 3y^2-3x \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x^2-y \\ y^2-x \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \overset{\text{Cramer}}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{135}\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{90}{135}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 16/3-4 \\ 16/3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} - \frac{1}{55}\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} - \frac{1}{55}\begin{pmatrix} 44/3 \\ 44/3 \end{pmatrix} = \frac{16}{15}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8. Übungseinheit

1) Gesucht ist eine NST von $p(x) = \frac{1}{3}x^4 - x^3 + 4x + 1$. Gib ausgehend von $x_0 = 3$ die ersten beiden Iterierten des Newton-Verfahrens an.

2) Das Newton-Verfahren zur Approximation der Minimalstelle von $p(x) = ax^2+bx+c$ mit $a>0$ konvergiert in einem Schritt.

3) Betrachte das nichtlineare Gleichungssystem $\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 = 4 \\ x_1^3 - x_2^3 = 0 \end{cases}$

a) Finde $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, deren NST genau die Lsg dieses Systems sind

b) Ausgehend von $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zwei Iterationen Newton-Verfahren

4) Betrachte das überbestimmte System $Ax=b$.

Minimiere $\|Ax-b\|$ mithilfe

a) der Normalengleichung

b) der reduzierten QR-Zerlegung

5) Zeige für $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(\frac{x}{2})$, dass die Iteration $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k \geq 0$, für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert.

1) $p(x) = \frac{1}{3}x^4 - x^3 + 4x + 1$, $x_0 = 3$

$p'(x) = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 + 4$

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} = 3 - \frac{\cancel{\frac{1}{3}3^4} - \cancel{3^3} + 12 + 1}{\frac{4}{3}\cdot 3^3 - 3\cdot 9 + 4} = 3 - \frac{13}{36-27+4} = 3 - \frac{13}{13} = 2$$

$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)} = 2 - \frac{\frac{1}{3}\cdot 2^4 - \cancel{2^3} + \cancel{8} + 1}{\frac{4}{3}2^3 - 12 + 4} = 2 - \frac{\frac{16}{3}+1}{\frac{32}{3}-8} = 2 - \frac{19/\cancel{3}}{8/\cancel{3}} = \frac{16}{8} - \frac{19}{8} = -\frac{3}{8}$$

2) min $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a > 0$

Notw. Bed: $p'(x) = 2ax + b \overset{!}{=} 0$, hinr. Bed: $p''(x) = 2a > 0 \Rightarrow$ Min.

$x_1 = x_0 - \frac{p'(x_0)}{p''(x_0)} = x_0 - \frac{2ax_0 + b}{2a} = \cancel{x_0} - \cancel{x_0} - \frac{b}{2a} = -\frac{b}{2a}$

$p'(x_1) = 2ax_1 + b = \cancel{2a}\left(\frac{-b}{\cancel{2a}}\right) + b = -b + b = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

3) nichtlin. GLS $\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 = 4 \\ x_1^3 - x_2^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1^3 + x_2^3 - 4 = 0 \\ x_1^3 - x_2^3 = 0 \end{cases}$, $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2^3 - 4 \\ x_1^3 - x_2^3 \end{pmatrix}$

b) $x_{k+1} = x_k - Df(x_k)^{-1} f(x_k)$, $\quad Df = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & 3x_2^2 \\ 3x_1^2 & -3x_2^2 \end{pmatrix}$

$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{-18} \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$

$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16/3 & 16/3 \\ 16/3 & -16/3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 20/27 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} - \frac{1}{-2 \cdot 16^2/9} \begin{pmatrix} -16/3 & -16/3 \\ -16/3 & 16/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20/27 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5/72 \\ 5/72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91/72 \\ 91/72 \end{pmatrix}$

4) $Ax = b$, Minimiere $\|Ax - b\|^2$

$(A^TA)^T = A^TA > 0$

$A^TA = \tilde{L}\tilde{L}^T$

a) $Ax = b \Rightarrow A^TAx = A^Tb \Rightarrow \tilde{L}\underbrace{\tilde{L}^T x}_{=:y} = A^Tb$

Berechne A^Tb und finde $\tilde{L}$ mit $A^TA = \tilde{L}\tilde{L}^T$

Löse $\tilde{L}y = A^Tb$ nach y und dann $\tilde{L}^T x = y$ nach x

x^* löst $A^TAx = A^Tb \overset{5.11}{\iff} x^* = \operatorname{argmin} \|Ax - b\|$

b) $Ax = b \Rightarrow QRx = b \Rightarrow Rx = Q^Tb$

Bestimme reduzierte QR-Zerlegung von A,

berechne Q^Tb, löst $Rx = Q^Tb$ nach x

x^* löst $QRx = b \overset{5.12}{\iff} x^* = \operatorname{argmin} \|Ax - b\|$

5) Zeige: Für $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(\frac{x}{2})$ konvergiert die Iteration $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k \geq 0$ für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $|\varphi'(x)| = |\frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2})| \leq \frac{1}{2}\underbrace{|\sin(\frac{x}{2})|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow x \mapsto \cos(\frac{x}{2})$ ist eine Kontaktion auf $\mathbb{R}$

Zudem gilt $\cos(\frac{1}{2}\mathbb{R}) = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$, also Selbstabb.

$\Rightarrow$ Vor. des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt $\Rightarrow$ Beh.

A44 nichtslin. GLS $\begin{cases} x = \exp\left(\frac{1}{2}(\sin(y)-1)\right) \\ y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+4} \end{cases}$

Betrachte: $F(x,y) := \begin{pmatrix} F_1(y) \\ F_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{1}{2}(\sin(y)-1)\right) \\ \frac{1}{2}\sqrt{x^2+4} \end{pmatrix}$

Nach dem MWS gilt

$$F_1(y_1)-F_1(y_2) = F_1'(\xi)(y_1-y_2) \quad \text{mit}$$

$$|F_1'(\xi)| = \left| \exp\left(\frac{\sin(\xi)-1}{2}\right)\frac{\cos(\xi)}{2} \right| \leq \frac{1}{2}$$

und $F_2(x_1)-F_2(x_2) = F_2'(\xi)(x_1-x_2)$ mit

$$|F_2'(\xi)| = \left| \frac{1}{4} \frac{2\xi}{\sqrt{\xi^2+4}} \right| \leq \frac{1}{2}$$

also insgesamt:

$$\|F(x_1,y_1)-F(x_2,y_2)\|_1 = |F_1(y_1)-F_1(y_2)| + |F_2(x_1)-F_2(x_2)|$$
$$\leq \frac{1}{2}|y_1-y_2| + \frac{1}{2}|x_1-x_2| = \frac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_1$$

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ ein vollst., metr. Raum,

Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz ex. ein eindeutiger Fixpunkt $(x,y) = F(x,y)$.