Tutorium zur Numerik I

22.09.21

4 Direkte Lösung linearer Gleichungssysteme

4.1 Das Gauß'sche Eliminationsverfahren und die LR-Zerlegung

Satz Für geg. A, b mit $\det(A) \neq 0$ ex. genau eine Lösung x für $Ax = b$ (denn $x = A^{-1}b$)

Lemma A $\begin{Bmatrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{Bmatrix}$ Dreiecksmatrix mit $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ $\begin{Bmatrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{Bmatrix}$ Dreiecksmatrix.

LR-Zerlegung: Zerlegung von A in ein Produkt $A = LR$

Linke untere Dreiecksmatrix (normiert) $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}$

rechte obere Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix}$

Satz Für jedes A mit $\det(A) \neq 0$ ex. ein P, sodass PA eine LR-Zerlegung besitzt, d.h. $\boxed{PA = LR}$. Diese Zerlegung ist eindeutig.

Motivation Wollen $Ax = b$ für $\det(A) \neq 0$ lösen. Lösung $x = A^{-1}b$ (kann sehr aufwendig sein)

- falls $A = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$, so ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/d_n \end{pmatrix}$
- falls $A = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix}$, so lässt sich $\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}x_1 + \dots + r_{1n}x_n \\ \vdots \\ r_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

  von unten nach oben lösen: $x_n = \frac{b_n}{r_{nn}} \overset{x_n}{\curvearrowright} x_{n-1} = \dots$

  (Für untere Dreiecksmatrizen)
- Falls $A = LR$, so gilt $Ax = b \Leftrightarrow L\underbrace{Rx}_{=:y} = b \Leftrightarrow Ly = b$

  Löse zunächst $Ly = b$ nach y und anschließen $Rx = y$ nach x

Pivotelement

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \\ 6 & 12 & 6 & 18 \\ 1 & 8 & 7 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 & 18 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 7 & 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1/2\,I \\ \\ -1/6\,I \end{matrix} \xrightarrow{L_1} \begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 6 & 12 \end{pmatrix} =: A^{(2)}$

mit $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Probe: $L_1 P_1 A = A^{(2)}$)

$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 6 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 & 18 \\ 0 & 6 & 6 & 12 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -1/3\,II \\ \\ \end{matrix} \xrightarrow{L_2} \begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 & 18 \\ 0 & 6 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =: A^{(3)}$

mit $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Probe: $L_2 P_2 A^{(2)} = A^{(3)}$)

$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 & 18 \\ 0 & 6 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 & 18 \\ 0 & 6 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -1/2\,III \end{matrix} \xrightarrow{L_3} \boxed{\begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 & 18 \\ 0 & 6 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =: R}$

mit $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ (Probe: $L_3 P_3 A^{(3)} = R$)

$$
\begin{aligned}
R &= L_3 P_3 L_2 P_2 L_1 P_1 A \\
&= L_3 \overset{\text{II, IV}}{P_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{II, IV}}{P_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_1 A = L_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_2^*} \overset{\text{III, IV}}{P_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_2 P_1 A \\
&= L_3 L_2^* \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/6 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=: L_1^*} P_3 P_2 P_1 A = \underbrace{L_3 L_2^* L_1^*}_{=: L^{-1}} \underbrace{P_3 P_2 P_1}_{=: \boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}} A
\end{aligned}
$$

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$$
\begin{aligned}
L &= (L_3 L_2^* L_1^*)^{-1} = (L_1^*)^{-1} (L_2^*)^{-1} L_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/6 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = L}
\end{aligned}
$$

(Probe: $PA = LR$)

<u>Vorgehensweise:</u>

1) Für $i = 1, \ldots, n-1$
   a) Betrachte die i-te Spalte
   b) Finde in dieser Spalte das <u>betragsmäßig</u> größte Element auf oder unterhalb der Diagonalen
   c) Vertausche die i-te Zeile mit der Zeile, in der das Pivotelement (16) ist; Bestimme die Permutationsmatrix P_i als $(n \times n)$-Einheitsmatrix, bei der dieselben Zeilen vertauscht sind
   d) Addiere die i-te Zeile so häufig zu den anderen Zeilen, dass unter dem Pivotelement lauter Nullen in der i-ten Spalte übrig bleiben. Bestimme die Frobeniusmatrix $L_i = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}$: Nur in der i-ten Spalte von L_i können Einträge $\neq 0$ stehen. Wurde zur j-ten Zeile c mal die i-te Zeile addiert, so ist $L_{ij} = c$
2) Das Vorgehen in 1) liefert R.
3) Es gilt $R = L_{n-1} P_{n-1} \cdot \ldots \cdot L_1 P_1 A = L_{n-1} L_{n-2}^* \cdot \ldots \cdot L_1^* P_{n-1} \cdot \ldots \cdot P_1 A$

   vgl. Lemma 4.7

   Beim Vertauschen von L_i mit P_j für $i < j$ werden in der i-ten Spalte von L_i die beiden Zeilen vertauscht, die auch bei P_j im Vergleich zur Einheitsmatrix vertauscht sind.
4) Berechne $P := P_{n-1} \cdot \ldots \cdot P_1$
5) Berechne $L := (L_{n-1} L_{n-2}^* \cdot \ldots \cdot L_1^*)^{-1}$. Beachte $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Nützliche Eigenschaften von Frobeniusmatrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ 0 & & l_{i+1,i} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & l_{n,i} & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ 0 & & -l_{i+1,i} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & -l_{n,i} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ 0 & & l_{i+1,i} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & l_{n,i} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ 0 & & l_{j+1,j} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & l_{n,j} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ 0 & & l_{i+1,i} & \ddots & & \\ & & \vdots & & 1 & \\ & & \vdots & 0 & l_{j+1,j} & \ddots \\ & & l_{n,i} & & l_{n,j} & 0 \quad 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } i < j$$

Spezialfall: Falls $P_1 = \ldots = P_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, so gilt $R = L_{n-1} \cdot \ldots \cdot L_1 A$

Mit $L := (L_{n-1} L_{n-2} \cdot \ldots \cdot L_1)^{-1}$ erhält man also die LR-Zerlegung für A.

Def Hauptabschnittsmatrix k-ten Grades

$$A[k] := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Satz Matrix A mit $\det(A) \neq 0$ besitzt eine LR-Zerlegung (ohne P) genau dann, wenn alle Hauptabschnittsdeterminanten von A ungleich Null sind.

$A = \begin{pmatrix} \boxed{} & \\ & \ddots \end{pmatrix}$

5. Übungseinheit

1) Es gelte $PA = LR$ mit Permutationsmatrix P
   a) Wie hilft das bei der Lösung von $Ax = b$ weiter?
   b) Wie lässt sich damit leicht die Determinante von A bestimmen?

2) Finde P, L und R, sodass $PA = LR$. Überprüfe deine Ergebnisse
   a) $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 10 \\ 0 & -1 & 4 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ -3 & -3 & 10 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

1) a) $Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow L\underbrace{Rx}_{=:y} = Pb \Leftrightarrow Ly = Pb$

Berechne Pb, löse $Ly = Pb$ nach y, löse dann $Rx = y$ nach x

b) Berechnung von $\det(A)$ mithilfe von Matrix-Zerlegungen

Benutze: $\det\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & d_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} = d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$

$\det(A^T) = \det(A)$, $P^{-1} = P^T$, $\det(L) = 1$, $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

$A = LR \Rightarrow \det(A) = \det(LR) = \det(L) \cdot \det\left(\begin{pmatrix} r_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & r_n \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot r_1 \cdot \ldots \cdot r_n$

$PA = LR \Rightarrow \det(PA) = \det(LR) \Rightarrow \det(P) \cdot \det(A) = \det(L) \cdot \det(R)$

$$\Rightarrow \det(A) = \frac{\det(L)\det(R)}{\det(P)} = \frac{1 \cdot r_1 \cdot \ldots \cdot r_n}{\pm 1}$$

2) a) $A=\begin{pmatrix}-3&-3&10\\0&-1&4\\6&0&-2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}6&0&-2\\0&-1&4\\-3&-3&10\end{pmatrix}_{+\frac{1}{2}I} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}6&0&-2\\0&-1&4\\0&-3&9\end{pmatrix} =: A^{(2)}$

$P_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \qquad L_1=\begin{pmatrix}1&&\\0&1&\\1/2&&1\end{pmatrix}$

$A^{(2)}=\begin{pmatrix}6&0&-2\\0&-1&4\\0&-3&9\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}6&0&-2\\0&-3&9\\0&-1&4\end{pmatrix}_{-\frac{1}{3}II} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}6&0&-2\\0&-3&9\\0&0&1\end{pmatrix} = R$

$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \qquad L_2=\begin{pmatrix}1&&\\0&1&\\0&-1/3&1\end{pmatrix}$

$R=L_2\overset{II,III}{P_2}L_1P_1A = L_2P_2\begin{pmatrix}1&&\\0&1&\\1/2&&1\end{pmatrix}P_1A = L_2\underbrace{\begin{pmatrix}1&&\\1/2&1&\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=:L_1^*}\underbrace{P_2P_1}_{=:P}A$

$P=P_2P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

$L=(L_2L_1^*)^{-1}=(L_1^*)^{-1}L_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&&\\1/2&1&\\0&&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&&\\0&1&\\0&-1/3&1\end{pmatrix}^{-1}$

$=\begin{pmatrix}1&&\\-1/2&1&\\0&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1/3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1/2&1&0\\0&1/3&1\end{pmatrix}$ $\quad$ (Probe: $PA=LR$)

b) $A=\begin{pmatrix}6&0&-2\\-3&-3&10\\0&-1&4\end{pmatrix}_{+\frac{1}{2}I} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}6&0&-2\\0&-3&9\\0&-1&4\end{pmatrix}_{-1/3II} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}6&0&-2\\0&-3&9\\0&0&1\end{pmatrix}=R$

$P_1=I,\ L_1=\begin{pmatrix}1&&\\1/2&1&\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad P_2=I,\ L_2=\begin{pmatrix}1&&\\0&1&\\0&-1/3&1\end{pmatrix}$

$R=L_2P_2L_1P_1A \overset{P_2=I}{=} \underbrace{L_2L_1}_{=L^{-1}}\underbrace{P_2P_1}_{P}A, \quad P=P_2P_1=I\cdot I=I=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$

$L=(L_2L_1)^{-1}=L_1^{-1}L_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&&\\-1/2&1&\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\0&1&\\0&1/3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1/2&1&0\\0&1/3&1\end{pmatrix}$

Hier gilt also sogar $A=LR$, da $P=I$.

4.2 Cholesky-Zerlegung

<u>Satz</u> Sei A symmetrisch (d.h. $A^T=A$) und positiv definit (d.h. $x^TAx>0\ \forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$)

Dann ex. die Zerlegung $A=\underset{\text{normierte untere Dreiecksmatrix}}{L}\ \underset{\text{Diagonalmatrix}}{D}\ L^T=\underbrace{(L\sqrt{D})}_{=:\tilde{L}}(L\sqrt{D})^T=\underset{\text{untere Dreiecksmatrix}}{\tilde{L}}\tilde{L}^T$

Motivation: Wollen $Ax=b$ für symm. pos. def. A lösen

- Für $A=\tilde{L}\tilde{L}^T$ gilt $Ax=b \iff \tilde{L}\underbrace{\tilde{L}^Tx}_{=:y}=b \iff \tilde{L}y=b$

  Löse zunächst $\tilde{L}y=b$ nach y und dann $\tilde{L}^Tx=y$ nach x

- $A=\tilde{L}\tilde{L}^T \Rightarrow \det(A)=\det(\tilde{L}\tilde{L}^T)=\det(\tilde{L})\det(\tilde{L}^T)=(\det(\tilde{L}))^2$

  $=\left(\det\left(\begin{pmatrix}l_1&&0\\&\ddots&\\ *&&l_n\end{pmatrix}\right)\right)^2=(l_1\cdot\ldots\cdot l_n)^2=l_1^2\cdot\ldots\cdot l_n^2$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2I \\ -1I \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +1/2\,II \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} =: R, \quad D := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 4 & \\ 0 & & 9 \end{pmatrix}$

$L := R^T D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1/4 & \\ 0 & & 1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ (Probe: $LDL^T = A$)

$\tilde{L} := L\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ (Probe: $\tilde{L}\tilde{L}^T = A$)

4.3 Stabilitätsuntersuchungen der Gauß-Elimination

Genauigkeit abhängig von Kondition der Aufgabe und Stabilität des Verfahrens.

Fehlerquellen beim Lösen von $Ax=b$: Fehler in den Eingangsdaten und Rundungsfehler

Norm (N1) $\|x\| > 0 \;\forall x \neq 0$ (N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ (N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Vektornormen: Maximums-Norm $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ und p-Norm $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$

Bsp $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. $\|x\|_\infty = \max\{1, 2, 3\} = 3$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = 1+2+3 = 6$

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

Satz Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent (da endlich-dimensional)

Def Durch Vektornorm induzierte Matrixnorm: $\|A\| := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$

$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$, $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ji}|$,

$\|A\|_2 = \sqrt{\underset{\text{Spektralradius}}{\uparrow\!\rho}(A^TA)} = \max\{\sqrt{|\lambda|} \mid A^TAx = \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$

Bsp $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\|A\|_1 = \max\{3, 3\} = 3$, $\|A\|_\infty = \max\{1, 1, 4\} = 4$

$\|A\|_2 = ?$, $A^TA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

$\chi(A^TA) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -4 \\ -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)^2 - 16 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow |5-\lambda| \overset{!}{=} 4 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9 \Rightarrow \|A\|_2 = \max\{1, 3\} = 3$

Def Konditionszahl $\kappa(A) = \begin{cases} \|A\| \cdot \|A^{-1}\|, & \text{falls } \det(A) \neq 0 \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$

Falls A symm & pos. def, so gilt in der 2-Norm: $\kappa(A) = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}$

Lemma Ist $\|B\| < 1$, so ist $\det(I+B) \neq 0$ und

$\|(I+B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$

Störungssatz Ist $\det(A) \neq 0$ und $\|\underbrace{\delta A}_{\text{"Störung von A"}}\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$,

dann gilt $\det(A+\delta A) \neq 0$ und $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$

5 QR-Zerlegung und Lösung linearer Ausgleichsprobleme

$A =$

Zerlege $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ und $\operatorname{rank}(A) = n$ folgendermaßen:

$$A = \underset{\text{orthogonale Matrix}}{Q}\ \underset{\text{rechte obere Dreiecksmatrix}}{R}$$

<u>Def</u> Matrix Q heißt orthogonal, wenn $Q^T Q = I$.

(D.h. $Q^{-1} = Q^T$, falls $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$)

$$\det(Q)^2 = \det(Q^T)\det(Q) = \det(Q^TQ) \overset{Q \text{ orth.}}{=} \det(I) = 1 \implies \det(Q) \in \{\pm 1\}$$

<u>reduzierte QR-Zerlegung</u>: $A = QR$ mit $A, Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$

vollständige QR-Zerlegung: $A = QR$ mit $A, R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$,

wobei Spalten q_j mit $j > n$ orthogonal zu $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ und $r_{ij} = 0$ für $i > n$

5.1 Die QR-Zerlegung mittels Gram-Schmidt

<u>Satz</u> Jedes $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$ besitzt eine vollst. (also auch eine reduzierte) QR-Zerlegung

<u>Satz</u> Die reduzierte QR-Zerlegung von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, $\operatorname{rank}(A) = n$

und $r_{jj} > 0\ \forall j$ ist eindeutig.

Problem: Auslöschungseffekte, da Gram-Schmidt i.A. numerisch instabil

<u>Bsp</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow a_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\qquad \|\cdot\| := \|\cdot\|_2$

$$q_1 := \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{4+1+4}}\, a_1 = \frac{1}{\sqrt{9}}\, a_1 = \frac{1}{3} a_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad r_{11} := \|a_1\| = 3$$

$$\tilde{q}_2 := a_2 - (a_2^T q_1) q_1 = a_2 - \left((1,1,1)\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}\right) q_1 = a_2 - \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10/9 \\ 5/9 \\ 10/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ 4/9 \\ -1/9 \end{pmatrix},$$

$$q_2 := \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{81} + \frac{16}{81} + \frac{1}{81}}}\, \tilde{q}_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\sqrt{18/81}} = \frac{\tilde{q}_2}{\sqrt{2/9}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1/9 \\ 4/9 \\ -1/9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3\sqrt{2} \\ 4/3\sqrt{2} \\ -1/3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$r_{22} = \|\tilde{q}_2\| = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad r_{12} = q_1^T a_2 = 5/3$$

$$Q := \begin{pmatrix} | & | \\ q_1 & q_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3\sqrt{2} \\ 1/3 & 4/3\sqrt{2} \\ 2/3 & -1/3\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad R := \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5/3 \\ 0 & \sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$$

(Probe: $Q^TQ = I$, $QR = A$)

Vorgehensweise:

Haben $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$. Setze $\tilde{q}_1 := a_1$ und $q_1 := \frac{\tilde{q}_1}{\|\tilde{q}_1\|}$

Für $i = 2, \dots, n$ berechne

1) $\tilde{q}_i := a_i - \sum_{j=1}^{i-1} (q_j^T a_i) q_j$, $\quad r_{ii} := \|\tilde{q}_i\|$

2) $q_i := \frac{\tilde{q}_i}{\|\tilde{q}_i\|}$, $\quad r_{ik} := q_i^T a_k$, $i < k$

$$Q := \begin{pmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_n \\ | & & | \end{pmatrix}, \quad R := \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

6. Übungseinheit

1) Es gelte $A^T = A = LDL^T > 0$ mit Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

a) Wie hilft das bei der Lösung von $Ax = b$ weiter?

b) Wie lässt sich damit leicht die Determinante von A berechnen?

2) Finde D, L und $\tilde{L}$, sodass $A = LDL^T$ und $A = \tilde{L}\tilde{L}^T$.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 12 \\ -8 & 17 & -24 \\ 12 & -24 & 45 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 25 & 100 & 0 \\ 100 & 401 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

3) Finde Q und R mithilfe von Gram-Schmidt, sodass $A = QR$ mit orthogonaler Matrix Q. Überprüfe, ob $A = QR$ und $Q^TQ = I$ gilt

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) Sei $\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

a) Bestimme $\|A\|_\infty$, $\|A\|_1$, $\|A\|_F$ und $\|A\|_2$

b) Ist die Frobeniusnorm $\|\cdot\|_F$ durch eine Vektornorm induziert?

1) a) $A = LDL^T \Rightarrow Ax = b \Leftrightarrow L\underbrace{DL^Tx}_{=:y} = b \Rightarrow Ly = b$

löse $Ly = b$ nach y, berechne $D^{-1}y = \begin{pmatrix} 1/d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1/d_1 \\ \vdots \\ y_n/d_n \end{pmatrix}$

und löse $L^Tx = D^{-1}y$ nach x

b) $A = LDL^T \Rightarrow \det(A) = \det(LDL^T) = \det(L)\det(D)\det(L) = 1 \cdot d_1 \cdot \ldots \cdot d_n \cdot 1$

2) a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 12 \\ -8 & 17 & -24 \\ 12 & -24 & 45 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2I \\ -3I \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = R$, $D = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$

$L = R^TD^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \\ 12 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 & & \\ & 1 & \\ & & 1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\tilde{L} = L\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ -4 & 1 & \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 25 & 100 & 0 \\ 100 & 401 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -4I \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 25 & 100 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2II \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 25 & 100 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = R$, $D = \begin{pmatrix} 25 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$

$L = R^TD^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/25 & & \\ & 1 & \\ & & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\tilde{L} = L\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 20 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

3) a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$

$\tilde{q}_1 := a_1, \quad q_1 := \frac{\tilde{q}_1}{\|\tilde{q}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{25}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{11} = \|\tilde{q}_1\| = 5$

$\tilde{q}_2 = a_2 - (a_2^T q_1) q_1 = a_2 - \left((0,0,3)\begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}\right) q_1 = a_2 - 0 \cdot q_1 = a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} = \frac{a_2}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_{22} = \|\tilde{q}_2\| = 3, \quad r_{12} = q_1^T a_2 = 0$

$\Rightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 \\ 3/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\tilde{q}_1 := a_1, \quad q_1 = \frac{\tilde{q}_1}{\|\tilde{q}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{11} = \sqrt{5}$

$\tilde{q}_2 = a_2 - (q_1^T a_2) q_1 = a_2 - \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ -4/5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\sqrt{80/25}} = \frac{\cancel{5}}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 8/\cancel{5} \\ -4/\cancel{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$r_{12} = q_1^T a_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad r_{13} = q_1^T a_3 = \frac{4}{\sqrt{5}}, \quad r_{22} = \frac{4}{\sqrt{5}}, \quad r_{23} = q_2^T a_3 = \frac{-2}{\sqrt{5}}$

$\tilde{q}_3 = a_3 - (q_1^T a_3) q_1 - (q_2^T a_3) q_2 = a_3 - \frac{4}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-2}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/5 \\ 8/5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4/5 \\ 2/5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = q_3, \quad r_{33} = 1$

$\Rightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 4/\sqrt{5} \\ 0 & 4/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

a) $\|A\|_\infty = \max\{1+4+12, 4+1+3\} = \max\{17, 8\} = 17$

$\|A\|_1 = \max\{1+4, 4+1, 12+3\} = \max\{5, 5, 15\} = 15$

$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + 4^2 + 12^2 + 4^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{1+16+144+16+1+9} = \sqrt{187}$

$\|A\|_2 = \sqrt{|\lambda_{max}(A^T A)|} = ?$

$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 51 \\ 0 & 51 & 153 \end{pmatrix}$

$\chi(A^T A) = \det \begin{pmatrix} 17-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 17-\lambda & 51 \\ 0 & 51 & 153-\lambda \end{pmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} (17-\lambda)^2 (153-\lambda) - 51^2 (17-\lambda) \overset{!}{=} 0$

$\lambda_1 = 17, \quad (17-\lambda)(153-\lambda) = 2601 - 170\lambda + \lambda^2 \overset{!}{=} 51^2$

$\Rightarrow \lambda^2 - 170\lambda \overset{!}{=} 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda - 170 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_3 = 170$

$|\lambda_{max}(A^T A)| = \max\{17, 0, 170\} = 170 \quad \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{170}$

b) Für durch Vektornormen induzierte Matrixnormen gilt $\|I_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Aber z.B. $\left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|_F = \sqrt{1^2+0^2+1^2+0^2} = \sqrt{2} \neq 1$

Somit ist die Frobeniusnorm <u>nicht</u> durch eine Vektornorm induziert.

(Die Frobeniusnorm ist durch ein Skalarprodukt induziert)