Tutorium zur Numerik I

21.9.21

2.2 Hermite-Interpolation (Polynominterpol. mit Ableitungen)

geg: $x_0 < \dots < x_m$, $m \geq 0$ und $f_i^{(k)} \in \mathbb{R}$, $i \in \{0,..,m\}$, $k \in \{0,..,\mu_i\}$, $\mu_i \geq 0$, $0 \leq i \leq m$

ges: $p \in \mathbb{P}_n$, $n = m + \sum_{i=1}^{m} \mu_i$ mit $p^{(k)}(x_i) = f_i^{(k)}$, $i \in \{0,..,m\}$, $k \in \{0,..,\mu_i\}$

Die Hermite-Interpol.aufg. besitzt eine eindeutige Lösung

Dividierte Differenzen:

$$[x_i, \dots, x_{i+k}]f = \begin{cases} \dfrac{f^{(k)}(x_i)}{k!} & \text{falls } x_{i+k} = x_i \\ \dfrac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f - [x_i, \dots, x_{i+k-1}]f}{x_{i+k} - x_i} & \text{falls } x_{i+k} \neq x_i \end{cases}$$

Bsp $f(\underset{=x_0}{0}) = -1$, $f'(0) = -2$, $f(\underset{=x_1}{1}) = 0$, $f'(1) = 10$, $f''(1) = 40$ (hier $m=2$ und $n=5$)

		$[\tilde{x}_0, \tilde{x}_1]f$	$[\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2]f$		
$\tilde{x}_0 = 0$	$[\tilde{x}_0]f = -1$				
$\tilde{x}_1 = 0$	$[\tilde{x}_1]f = -1$	-2			
$\tilde{x}_2 = 1$	$[\tilde{x}_2]f = 0$	$\frac{0+1}{1-0} = 1$	$\frac{1+2}{1-0} = 3$		
$\tilde{x}_3 = 1$	$[\tilde{x}_3]f = 0$	10	$\frac{10-1}{1-0} = 9$	$\frac{9-3}{1-0} = 6$	
$\tilde{x}_4 = 1$	$[\tilde{x}_4]f = 0$	10	$\frac{40}{2} = 20$	$\frac{20-9}{1-0} = 11$	$\frac{11-6}{1-0} = 5$
				$= [\tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]f$	

$$\Rightarrow p(x) = -1 - 2(x - \tilde{x}_0) + 3(x-\tilde{x}_0)(x-\tilde{x}_1) + 6(x-\tilde{x}_0)(x-\tilde{x}_1)(x-\tilde{x}_2)$$
$$+ 5(x-\tilde{x}_0)(x-\tilde{x}_1)(x-\tilde{x}_2)(x-\tilde{x}_3)$$
$$= -1 - 2x + 3x^2 + 6x^2(x-1) + 5x^2(x-1)^2$$

Vorgehensweise:

1) Knoten entsprechend ihrer Häufigkeit vervielfachen
2) Dividierte Differenzen berechnen (Aufpassen, falls $x_{i+k} = x_i$)
3) Knotenpolynome auswerten
4) Ergebnis in Newton-Darstellung aufschreiben

Fehler: $f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^{m} (x-x_i)^{\mu_i + 1}$ für $\xi(x) \in [x_0, x_m]$

2.3 Spline-Interpolation (auf Teilintervallen Polynome niedrigeren Grades)

Def Sei $I = [a,b]$ Intervall mit $a<b$ und $X: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ Zerlegung von I. Dann ist $S_k(X) = \{ s \in C^{k-1}(I) \mid s|_{[x_{j-1}, x_j]} \in \mathbb{P}_k, 1 \leq j \leq n\}$ der Raum der polynomialen Spline-Funktionen vom Grad k auf der Zerlegung X.

$k=1$: stetige Polygonzüge

$k=2$: quadratische Splines

$p(x) = \underline{a}x^3 + \underline{b}x^2 + \underline{c}x + \underline{d}$

$k=3$: kubische Splines, d.h. Polynome 3. Grades mit je 4 Parametern auf jedem Teilintervall, also insgesamt $4n$ Parameter

$3(n-1)$ Stetigkeitsbedingungen und $n+1$ Interpol. bed.

$\Rightarrow 4n - 3(n-1) - (n+1) = \cancel{4n} - \cancel{3n} + 3 - \cancel{n} - 1 = 2$ "Freiheitsgrade"

$\Rightarrow$ Interpol. aufgabe enthält zwei Bedingungen zu wenig!

Die Interpol. probleme mit kubischen natürlichen, vollständigen, periodischen oder not-a-knot-Splines sind stets eindeutig lösbar.

Vorgehensweise:

1) Berechne $h_j := x_j - x_{j-1}$ für $j = 1, \dots, n$
2) Berechne $\mu_j := \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}}$ und $\lambda_j := \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}$ für $j = 1, \dots, n-1$
3) Berechne dividierte Differenzen $\delta_j = [x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]f$ für $j = 1, \dots, n-1$ (ggf. auf $\delta_0 = [x_0, x_0, x_1]f$ und $\delta_n = [x_{n-1}, x_n, x_n]f$)
4) Wähle zwei Bedingungen und löse Gleichungssystem für $M_0, \dots, M_n$
5) Berechne $c_j := [x_{j-1}, x_j]f - \frac{h_j}{6}(M_j - M_{j-1})$ und $d_j = f_{j-1} - \frac{h_j^2}{6} M_{j-1}$ für $j = 1, \dots, n$
6) Berechne für $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ die Lösung

$$s(x)\big|_{I_j} = \frac{1}{h_j}\left(M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6} + M_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6}\right) + c_j (x - x_{j-1}) + d_j \quad \forall j$$

Natürliche Splines: $M_0 = M_n = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & & & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{n-1} \end{pmatrix}$$

Vollständige Splines: $s'(x_0) = f'(x_0)$ und $s'(x_n) = f'(x_n)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}$$

wobei $\delta_0 := [x_0, x_0, x_1]f$ und $\delta_n := [x_{n-1}, x_n, x_n]f$

Periodische Splines: $\left.\begin{array}{l} s'(x_0) = s'(x_n) \\ s''(x_0) = s''(x_n) \end{array}\right\} \Rightarrow M_0 = M_n$

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{n-1} \\ \tilde{\delta}_n \end{pmatrix}$$

wobei $x_{n+1} := x_1 + (b-a)$ und $\tilde{\delta}_n := [x_{n-1}, x_n, x_{n+1}]f$

Not-a-knot-Splines: $s'''(x_1 - 0) = s'''(x_1 + 0)$, $s'''(x_{n-1} - 0) = s'''(x_{n-1} + 0)$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & -1 & \mu_1 & & & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & 2 & & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & & & \lambda_{n-1} & -1 & \mu_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Def Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt (strikt) diagonaldominant, falls

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |a_{ik}| \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Konvergenz: Sei $f \in C^4([a,b])$ mit $f''(a) = f''(b) = 0$, h der maximale Gitterabstand und s der kubische natürliche Spline, der f auf der Zerlegung X interpoliert. Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$\| f - s \|_{\infty, [a,b]} \leq h^4 \| f^{(4)} \|_{\infty, [a,b]}$$

3 Numerische Integration

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$I(f) := \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Problem: Stammfkt. i.A. unbekannt $\Rightarrow$ brauchen numerische Approx

z.B. Riemann'sche Summe $I(f) \approx S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ mit $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$

Es gilt $S_n(f) \xrightarrow{n \to \infty} I(f)$, aber Konvergenz i.A. langsam

3.1. Quadraturformeln

Trapezregel $T(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$

(lin. Interpol. durch a und b, hat Exaktheitsgrad 1)

Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{stetig}} \underbrace{g(x)}_{\text{int'bar, ohne VZ-Wechsel}} dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx \quad \text{für ein } \xi \in [a,b]$$

Bsp a) Leite $T(f)$ als Integral über das Interpol.polynom in a und b her

b) Zeige: $T(f)$ integriert alle Polynome 1. Grades exakt

c) Berechne den Fehler von $T(f)$

Lsg: a) Suche c_1, c_2, sodass $p(x) := c_1(x-a) + c_2$ die Bedingung $p(x_i) = f(x_i)$ erfüllt:

$$c_1(b-a)+c_2 = f(b) \overset{f(a)=c_2}{\Rightarrow} c_1(b-a) = f(b)-f(a) \Rightarrow c_1 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b c_1(x-a)+c_2 \,dx$$

$$\overset{\substack{\text{subst}\\ u:=x-a}}{=} \int_0^{b-a} c_1 u + c_2 \,dx = \left[\frac{c_1 u^2}{2} + c_2 u\right]_0^{b-a}$$

$$= \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\,\frac{(b-a)^{\cancel{2}}}{2} + 2f(a)\,\frac{(b-a)}{2} = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) =: T(f)$$

b) zz: $T(f)$ integriert die Monome 1 und x exakt.

1: $\int_a^b 1\,dx = [x]_a^b = b-a$ und $T(1)=\frac{b-a}{2}(1+1)=b-a$ ✓

x: $\int_a^b x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}$ und $T(x)=\frac{b-a}{2}(a+b) \overset{\text{3.bin.F.}}{=} \frac{b^2-a^2}{2}$ ✓

c) $R(f)=I(f)-T(f)=\int_a^b (f(x)-p(x))\,dx \overset{2.12}{=} \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2!} f''(\xi(x))\,dx$

$\overset{\text{MWS}}{=} f''(\xi_0)\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2}\,dx = \ldots = -\frac{f''(\xi_0)}{12}(b-a)^3$ für $\xi_0\in[a,b]$

Merke: QF besitzt Exaktheitsgrad n

$\Leftrightarrow$ QF integriert alle Polynome n-ten Grades exakt

$\Leftrightarrow$ QF integriert $1,x,x^2,\ldots,x^n$ exakt (da $\{1,x,\ldots,x^n\}$ Basis des $\mathbb{P}_n$)

Simpsonregel: $S(f)=\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$

(quadr. Interpol. durch $a, \frac{a+b}{2}, b$; Exaktheitsgrad 3)

3. Übungseinheit

1) Bestimme das Hermite-Interpol. polynom zu den Daten

$x_0=-1,\ p(x_0)=4,\ p'(x_0)=-4,\ x_1=0,\ p(x_1)=-2,\ x_2=2,\ p(x_2)=1$

2) Bestimme das Hermite-Interpol. polynom, sodass dessen Grad minimal wird und die Daten

$x_0=1,\ q(x_0)=2,\ q''(x_0)=-4,\ x_1=0,\ q(x_1)=2$

interpoliert werden. Berechne $q'(x_0)$.

3) Bestimme den natürlichen kubischen Spline zu

x_k	2	3	4	5	6
$f(x_k)$	$5/2$	1	0	$-1/6$	$1/6$

1) Hermite zu $p(-1)=4,\ p'(-1)=-4,\ p(0)=-2,\ p(2)=1$

$$\begin{array}{llllll}
\tilde{x}_0=-1 & 4 & & & & \\
 & & \frac{p'(-1)}{1!}=-4 & & & \\
\tilde{x}_1=-1 & 4 & & \frac{-6+4}{0+1}=-2 & & \\
 & & \frac{-2-4}{0+1}=-6 & & \frac{5/2+4/2}{2+1}=3/2 & \\
\tilde{x}_2=0 & -2 & & \frac{3/2+12/2}{2+1}=\frac{5}{2} & & \\
 & & \frac{1+2}{2-0}=3/2 & & & \\
\tilde{x}_3=2 & 1 & & & &
\end{array}$$

$$\Rightarrow p(x) = 4 - 4(x-\tilde{x}_0) - 2(x-\tilde{x}_0)(x-\tilde{x}_1) + \tfrac{3}{2}(x-\tilde{x}_0)(x-\tilde{x}_1)(x-\tilde{x}_2)$$

$$= 4 - 4(x+1) - 2(x+1)^2 + \tfrac{3}{2}(x+1)^2 x = \ldots = \tfrac{3}{2}x^3 + x^2 - \tfrac{13}{2}x - 2$$

2) Hermite zu $q(1) = 2$, $q'(1) =: c$, $q''(1) = -4$, $q(0) = 2$

$$\begin{array}{llllll}
\tilde{x}_0 = 0 & 2 & & & & \\
 & & \frac{2-2}{1-0} = 0 & & & \\
\tilde{x}_1 = 1 & 2 & & \frac{c-0}{1-0} = c & & \\
 & & q'(1) = c & & \frac{-2-c}{1-0} = -2-c & \\
\tilde{x}_2 = 1 & 2 & & \frac{q''(1)}{2!} = \frac{-4}{2} = -2 & & \\
 & & q'(1) = c & & & \\
\tilde{x}_3 = 1 & 2 & & & &
\end{array}$$

$$\Rightarrow q(x) = 2 + 0(x-\tilde{x}_0) + c(x-\tilde{x}_0)(x-\tilde{x}_1) - (2+c)(x-\tilde{x}_0)(x-\tilde{x}_1)(x-\tilde{x}_2)$$

$$= 2 + cx(x-1) - (2+c)x(x-1)^2$$

$$= 2 + cx^2 - cx - (2+c)(x^3 - 2x^2 + x)$$

$$= 2 + \underline{cx^2} - \underline{cx} - \underline{2x^3} + \underline{4x^2} - \underline{2x} - \underline{cx^3} + \underline{2cx^2} - \underline{cx}$$

$$= -(2+c)x^3 + (4+3c)x^2 - (2+2c)x + 2$$

Damit der Grad von q minimal wird, wähle c so, dass $-(2+c) = 0$, also $c = -2$.

$$\Rightarrow \quad q(x) = -2x^2 + 2x + 2$$

$$\Rightarrow \quad q'(x) = -4x + 2 \quad \Rightarrow \quad q'(x_0) = q'(1) = -4 + 2 = -2$$

3) Nat. kub. Spline zu

x_k	2	3	4	5	6
$f(x_k)$	5/2	1	0	-1/6	1/6

$$h_j = x_j - x_{j-1} \quad \Rightarrow \quad h_1 = x_1 - x_0 = 3 - 2 = 1 = h_2 = h_3 = h_4$$

$$\mu_j = \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}} \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = \frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = \mu_2 = \mu_3$$

$$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{h_2}{h_1 + h_2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = \lambda_2 = \lambda_3$$

$$\begin{array}{llll}
x_0 = 2 & [x_0]f = 5/2 & & \\
 & & 1 - \frac{5}{2} = -3/2 & \\
x_1 = 3 & [x_1]f = 1 & & \frac{-1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{4} = [x_0, x_1, x_2]f \\
 & & -1 & \\
x_2 = 4 & [x_2]f = 0 & & \frac{-\frac{1}{6}+1}{2} = \frac{5}{12} = [x_1, x_2, x_3]f \\
 & & -1/6 & \\
x_3 = 5 & [x_3]f = -1/6 & & \frac{1/3 + 1/6}{2} = 1/4 = [x_2, x_3, x_4]f \\
 & & \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} & \\
x_4 = 6 & [x_4]f = 1/6 & &
\end{array}$$

natürliche Splines: $M_0 = M_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 \\ 0 & \mu_3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} [x_0, x_1, x_2]f \\ [x_1, x_2, x_3]f \\ [x_2, x_3, x_4]f \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1/4 \\ 5/12 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (i) \\ (ii) \\ (iii) \end{matrix}$$

$$4M_1 + M_2 \overset{(i)}{=} 3 \quad \Rightarrow \quad M_2 = 3 - 4M_1 \quad (i')$$

$$M_2 + 4M_3 \overset{(iii)}{=} 3 \quad \Rightarrow \quad M_3 = \tfrac{1}{4}(3 - M_2) \overset{(i')}{=} \tfrac{1}{4}(\cancel{3} - \cancel{3} + 4M_1) = M_1 \quad (iii')$$

$$5 \overset{(ii)}{=} M_1 + 4M_2 + M_3 \overset{(i'),(iii')}{=} M_1 + 4(3 - 4M_1) + M_1 = 12 - 14M_1 \quad \Rightarrow \tfrac{1}{2} = M_1 \overset{(iii')}{=} M_3 \quad (ii')$$

$$M_2 \overset{(ii)}{=} 3 - 4M_1 \overset{(ii')}{=} 3 - 4\tfrac{1}{2} = 3 - 2 = 1 \quad \Rightarrow M_2 = 1$$

Also $M_0 = 0$, $M_1 = \frac{1}{2}$, $M_2 = 1$, $M_3 = \frac{1}{2}$, $M_4 = 0$

$$c_j = [x_{j-1}, x_j] f - \frac{h_j}{6}(M_j - M_{j-1})$$

$$\Rightarrow c_1 = [x_0, x_1] f - \frac{1}{6}(M_1 - M_0) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \boxed{\frac{-19}{12} = c_1}$$

$$c_2 = [x_1, x_2] f - \frac{1}{6}(M_2 - M_1) = -1 - \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{-13}{12} = c_2}$$

$$c_3 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \boxed{\frac{-1}{12} = c_3}, \quad c_4 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\left(0 - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{5}{12} = c_4}$$

$$d_j = f_{j-1} - \frac{h_j^2}{6} M_{j-1}$$

$$\Rightarrow d_1 = f_0 - \frac{h_1^2}{6} M_0 = \frac{5}{2} - \frac{1}{6} \cdot 0 = \boxed{\frac{5}{2} = d_1}$$

$$d_2 = 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{11}{12} = d_2}, \quad d_3 = 0 - \frac{1}{6} \cdot 1 = \boxed{\frac{-1}{6} = d_3}, \quad d_4 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{-1}{4} = d_4}$$

$$I_j = [x_{j-1}, x_j], \quad s(x)\big|_{I_j} = \frac{1}{h_j}\left(M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6} + M_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6}\right) + c_j (x - x_{j-1}) + d_j$$

$$s(x)\big|_{I_1} = M_1 \frac{(x - x_0)^3}{6} + M_0 \frac{(x_1 - x)^3}{6} + c_1 (x - x_0) + d_1$$

$$= \frac{(x-2)^3}{12} + 0 - \frac{19}{12}(x - 2) + \frac{5}{2} = \ldots = \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{7}{12} x + 5$$

$$s(x)\big|_{I_2} = 1 \cdot \frac{(x-3)^3}{6} + \frac{1}{2} \frac{(4-x)^3}{6} - \frac{13}{12}(x-3) + \frac{11}{12} = \ldots = \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{7}{12} x + 5$$

$$s(x)\big|_{I_3} = \frac{1}{2} \frac{(x-4)^3}{6} + 1 \frac{(5-x)^3}{6} - \frac{1}{12}(x-4) - \frac{1}{6} = \ldots = \frac{-1}{12} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - \frac{103}{12} x + \frac{47}{3}$$

$$s(x)\big|_{I_4} = 0 \cdot \frac{(x-5)^3}{6} + \frac{1}{2} \frac{(6-x)^3}{6} + \frac{5}{12}(x-5) - \frac{1}{4} = \ldots = \frac{-1}{12} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - \frac{103}{12} x + \frac{47}{3}$$

$$\Rightarrow \quad s(x) = \begin{cases} \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{7}{12} x + 5 & \text{für } x \in [2, 4] \\ \frac{-1}{12} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - \frac{103}{12} x + \frac{47}{3} & \text{für } x \in]4, 6] \end{cases}$$

3.2 Grundlegende Definitionen

Def Für $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$ ist Funktional

$$Q(f) := \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) = \int_a^b p_n(x)\, dx \approx I(f)$$ heißt Quadraturformel

mit Stützstellen x_i und Gewichten a_i

Geg: $Q(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ auf $[a, b]$, ges: $\tilde{Q}(g) = \sum_{i=0}^{n} \tilde{a}_i\, g(\tilde{x}_i)$ auf $[\hat{a}, \tilde{b}]$

$\rightsquigarrow$ Transformationsformel: $\tilde{a}_i := \frac{\tilde{b} - \tilde{a}}{b - a} a_i$ und $\tilde{x}_i = \tilde{a} + (x_i - a) \frac{\tilde{b} - \tilde{a}}{b - a}$

Eine Interpolationsquadraturformel hat mindestens Exaktheitsgrad n.

Newton-Cotes-Formeln sind Interpolations-QF mit äquidistanten Stützstellen

Zu $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$ ex. genau eine Interpol.-QF mit diesen Stützstellen

$$Q_n(f) := \int_a^b p_n(x)\, dx \overset{\text{Lagrange}}{=} \int_a^b \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, \ell_{jn}(x)\, dx = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \int_a^b \ell_{jn}(x)\, dx = \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j)$$

mit $a_j = \int_a^b \ell_{jn}(x)\, dx$

Klassische QF auf $[0,1]$:

	Stützstellen x_j	Gewichte a_j
Rechteckregel	0	1
Mittelpunktregel	$1/2$	1
Trapezregel	$0,\ 1$	$1/2,\ 1/2$
Simpsonregel	$0,\ 1/2,\ 1$	$1/6,\ 4/6,\ 1/6$

Für $n>6$ und äquidistante Stützstellen: negative Gewichte

$\Rightarrow$ numerisch unbrauchbar

Ein zusammengesetztes Quadraturverfahren $Q_{(m)} := Q_n^{(1)} + Q_n^{(2)} + \dots + Q_n^{(m)}$ ist genau dann für alle stetigen Funktionen konvergent, wenn seine Elementarformeln Konstanten exakt integrieren.

3.3 Iterierte Trapezregel

$$T_{h_j}(f) := \sum_{i=0}^{n-1} h_j \frac{f(a+ih_j)+f(a+(i+1)h_j)}{2} \quad \text{für } h_j = \frac{b-a}{n}$$

Bernoulli-Polynome (i) $B_0(x)=1$ (ii) $B_{r+1}'(x) = (r+1)B_r(x)$ (iii) $\int_0^1 B_r(x)dx = 0$

z.B. $B_0(x)=1$, $B_1(x) = x-\frac{1}{2}$, $B_2(x) = x^2-x+\frac{1}{6}$

$\rightsquigarrow$ Bernoulli-Zahlen $B_n := B_n(0)$, z.B. $B_0=1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6}$

Extrapolation $h_0 > h_1 > \dots > h_n > 0$ 1) Berechne $T_{h_i}(f)$

2) Interpoliere $(h_i^2, T_{h_i}(f))$ mit $p(h_i^2) = a_0 + a_1 h_i^2 + a_2 h_i^4 + \dots + a_n h_i^{2n} \overset{!}{=} T_{h_i}(f)$

3) Betrachte $p(0)$ als neue Näherung für $I(f)$

Romberg-Verfahren (Schema von Aitken-Neville), $T_{j,0} := T_{h_j}(f)$

$$\begin{matrix} T_{0,0} & & \\ T_{1,0} & T_{1,1} & \\ T_{2,0} & T_{2,1} & T_{2,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix} \qquad T_{j,k} = T_{j,k-1} + \frac{T_{j,k-1} - T_{j-1,k-1}}{(h_{j-k}/h_j)^2 - 1}$$

Romberg-Folge: $h_0, \frac{h_0}{2}, \frac{h_0}{4}, \dots$

Bulirsch-Folge: $h_0, \frac{h_0}{2}, \frac{h_0}{3}, \dots$ mit $h_0 = b-a$

Bsp Geg: $h_0 = b-a$, $h_1 = \frac{h_0}{2}$. Beh: $T_{1,1}$ des Romberg-Verf. ist die Simpsonregel

$$h_0 = b-a = \frac{b-a}{1} \Rightarrow n=1 \Rightarrow T_{h_0} = h_0 \frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) =: T_{0,0}$$

$$h_1 = \frac{b-a}{2} \Rightarrow n=2 \Rightarrow T_{h_1} = h_1\left(\frac{f(a)+f(\frac{a+b}{2})}{2} + \frac{f(\frac{a+b}{2})+f(b)}{2}\right) = \frac{b-a}{4}\left(f(a)+2f(\tfrac{a+b}{2})+f(b)\right) =: T_{1,0}$$

$$T_{1,1} = T_{1,0} + \frac{T_{1,0}-T_{0,0}}{(h_0/h_1)^2-1} = T_{1,0} + \frac{T_{1,0}-T_{0,0}}{3} = \frac{4}{3}T_{1,0} - \frac{1}{3}T_{0,0}$$

$$= \frac{2\cancel{4}}{2\cdot 3}\,\frac{b-a}{\cancel{4}}\left(f(a)+2f(\tfrac{a+b}{2})+f(b)\right) - \frac{1}{3}\,\frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b))$$

$$= \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f(\tfrac{a+b}{2})+f(b)\right) = S(f)$$

3.4 Gauß'sche Quadraturformeln

Lemma 3.16: Eine obere Grenze für den Exaktheitsgrad der QF $Q_n(f)$ ist $2n+1$.

Bew: Wid. ann: Q_n exakt $\forall p \in \mathbb{P}_{2n+2}$. Dann $Q_n(p) = I_p$ für $p(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2 \in \mathbb{P}_{2n+2}$,

also $0 < \int_a^b p(x)\,dx = Q_n(p) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, p(x_i) = 0$ ↯ $\square$

Im Funktionenraum $C([a,b])$ das L_2-Skalarprodukt $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

und $\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)}$

Für nichtnegative Funktion $w:]a,b[\to \mathbb{R}$ mit $\int_a^b w(x)\,dx > 0$ kann man ein gewichtetes Skalarprodukt $(f,g)_w := \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx$ definieren.

Anwendung des Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahrens auf die Monombasis $\{1, x, \dots, x^{n+1}\}$ durch $p_0(x) = 1$, $p_k(x) = x^k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(x^k, p_j)}{\|p_j\|_2^2} p_j(x)$

liefert Orthogonalsystem $\{p_0, \dots, p_{n+1}\}$ in $\mathbb{P}_{n+1}([a,b])$

Satz Die bzgl. $(\cdot,\cdot)_w$ orthogonalen Polynome p_n (Vielfache der Legendre-Polynome) besitzen lauter reelle, einfache NST, die alle im Innern des Intervalls $[a,b]$ liegen.

Legendre-Polynome: Formel von Rodrigues $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$

Rekursionsformel: $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)x\,P_n(x) - n P_{n-1}(x)$

Gauß'sche QF: Es gibt genau eine interpol. QF zu $n+1$ paarw. versch. Stützstellen über dem Intervall $[-1,1]$ mit Exaktheitsgrad $2n+1$. Ihre Stützstellen sind gerade die NST des $(n+1)$-ten Legendre-Polynoms $P_{n+1} \in \mathbb{P}_{n+1}$.

Radau-Verfahren: Auf $[-1,1]$ gibt es genau eine interpol. QF zu $n+1$ paarw. versch. Stützstellen und $x_n = 1$ mit Exaktheitsgrad $2n$.

Lobatto-Verfahren: Auf $[-1,1]$ gibt es genau eine interpol. QF zu $n+1$ paarw. versch. Stützstellen und $x_0 = -1$, $x_n = 1$ mit Exaktheitsgrad $2n-1$.

Die NST des $(n+1)$-ten Legendre-Polynoms sind EW von

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & & 0 \\ c_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_n \\ 0 & & c_n & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{k}{\sqrt{4k^2-1}}$$

4. Übungseinheit

1) Gib sowohl die kl. Simpsonregel auf dem Grundintervall $[0,1]$ an, als auch deren Transformierte auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$

2) Es gelte $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{2} a_i f(x_i) = Q(f)$ mit $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$

a) Berechne Gewichte a_0, a_1 und a_2 zur interpol. QF

b) Bestimme maximale $n \in \mathbb{N}_0$, sodass alle Polynome $p \in \mathbb{P}_n$ durch $Q(f)$ exakt integriert werden.

1) Kassische Simpsonregel auf dem Grundintervall $[\overset{a}{0}, \overset{b}{1}]$

$$S(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = \frac{1}{6}\left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right)$$

$$S(f) = \sum_{i=0}^{2} a_i f(x_i) \Rightarrow a_0 = \frac{1}{6},\ a_1 = \frac{2}{3},\ a_2 = \frac{1}{6},\ x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1$$

Transformierte auf $[\underset{\hat{a}}{-\pi}, \underset{\hat{b}}{\pi}]$

$$\tilde{a}_i = \frac{\hat{b}-\hat{a}}{b-a} a_i = \frac{\pi+\pi}{1-0} a_i = 2\pi a_i \Rightarrow \tilde{a}_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3},\ \tilde{a}_1 = \frac{4\pi}{3},\ \tilde{a}_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$\tilde{x}_i = \hat{a} + (x_i - a)\frac{\hat{b}-\hat{a}}{b-a} = -\pi + 2\pi x_i$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_0 = -\pi + 2\pi \cdot 0 = -\pi,\quad \tilde{x}_1 = -\pi + 2\pi\frac{1}{2} = 0,\quad \tilde{x}_2 = -\pi + 2\pi = \pi$$

$$\Rightarrow \tilde{S}(f) = \sum_{i=0}^{2} \tilde{a}_i f(\tilde{x}_i) = \frac{\pi}{3} f(-\pi) + \frac{4\pi}{3} f(0) + \frac{\pi}{3} f(\pi) = \frac{\pi}{3}\left(f(-\pi) + 4f(0) + f(\pi)\right)$$

2) Es gelte $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{2} a_i f(x_i) = Q(f)$ mit $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$

a) Berechne Gewichte a_0, a_1 und a_2 zur interpol. QF.

$$Q_2(f) = \int_a^b p(x)\,dx = \sum_{j=0}^{2} f(x_j) \int_a^b l_{j2}(x)\,dx = \sum_{j=0}^{2} a_j f(x_j)$$

$$\text{mit } a_j = \int_a^b l_{j2}(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{i=-1 \\ i \neq j}}^{2} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}\,dx$$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq 0}}^{2} \frac{x - x_i}{-\sqrt{3/5} - x_i}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x}{-\sqrt{3/5}} \cdot \frac{x - \sqrt{3/5}}{-2\sqrt{3/5}}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2 - \sqrt{3/5}\,x}{2 \cdot 3/5}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{5}{6}x^2 - \frac{5}{6}\sqrt{\frac{3}{5}}\,x\right) dx = \left[\frac{5}{6}\frac{x^3}{3} - \frac{5}{6}\sqrt{\frac{3}{5}}\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{5}{18} - \cancel{\frac{5}{12}\sqrt{\frac{3}{5}}} + \frac{5}{18} + \cancel{\frac{5}{12}\sqrt{\frac{3}{5}}} = 2 \cdot \frac{5}{18} = \boxed{\frac{5}{9} = a_0}$$

$$a_1 = \int_{-1}^{1} \frac{x + \sqrt{3/5}}{\sqrt{3/5}} \cdot \frac{x - \sqrt{3/5}}{-\sqrt{3/5}}\,dx = -\int_{-1}^{1} \frac{5}{3}\left(x^2 - \frac{3}{5}\right) = \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{5}{3}x^2\right) dx$$

$$= \left[x - \frac{5}{9}x^3\right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{5}{9} + 1 - \frac{5}{9} = 2 - \frac{10}{9} = \boxed{\frac{8}{9} = a_1}$$

$$a_2 = \int_{-1}^{1} \frac{x + \sqrt{3/5}}{2\sqrt{3/5}} \cdot \frac{x}{\sqrt{3/5}}\,dx = \ldots = \boxed{\frac{5}{9} = a_2}$$

$$\Rightarrow Q(f) = \sum_{i=0}^{2} a_i f(x_i) = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

b) Best. max. $n \in \mathbb{N}_0$, s.d. alle $p \in \mathbb{P}_n$ durch $Q(f)$ exakt integriert werden

klar, da interpol. QF mit 3 Stützstellen

$$1:\ Q(1) = \frac{5}{9} + \frac{8}{9} + \frac{5}{9} = 2 = 1 + 1 = [x]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} 1\,dx \quad ✓$$

$$x:\ Q(x) = \cancel{\frac{5}{9}}\left(\cancel{-\sqrt{\frac{3}{5}}}\right) + \frac{8}{9} \cdot 0 + \cancel{\frac{5}{9} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}} = 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} x\,dx \quad ✓$$

$$x^2:\ Q(x^2) = \frac{5}{9}\frac{3}{5} + \frac{5}{9}\frac{3}{5} = 2\frac{\cancel{5}}{9}\frac{3}{\cancel{5}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} x^2\,dx \quad ✓$$

$x^3: \; Q(x^3) = \frac{5}{9}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 + \frac{5}{9}\sqrt{\frac{3}{5}}^3 = 0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} x^3 \, dx$ ✓

$x^4: \; Q(x^4) = \frac{5}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{5}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 2 \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{9}} \frac{\cancel{9}}{5 \cdot \cancel{5}} = \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} x^4 \, dx$ ✓

$x^5: \; Q(x^5) = \frac{5}{9}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5 + \frac{5}{9}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5 = 0 = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \left[\frac{x^6}{6}\right]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} x^5 \, dx$ ✓

Somit können Polynome $p \in \mathbb{P}_5$ exakt integriert werden!

Maximal, da Lemma 3.16:

$Q_n(f)$ hat max. Exaktheitsgrad $2n+1 \overset{\text{hier}}{=} 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5$

(Alternativ zeige $Q(x^6) \overset{\text{i.A.}}{\neq} \int_{-1}^{1} x^6 \, dx$)