Die Simplexmethode: Grundlagen

Viele Anwendungen

- Unternehmensplanung [85%]
- Fahr- & Flugplanung
- Netzwerkoptimierung
- Mischungsprobleme
- Teilprobleme bei kombinatorischer oder nichtlinearer Optimierung

führen zu **Linearen Programmen**

d.h. "Lineare Optimierungsprobleme"

d.h. "Minimierung einer linearen Fkt. bei linearen Gleichungen und Ungleichungen":

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ c^T x \;\middle|\; Ax = b ,\; Cx \leq d \right\}$$

komponentenweise

$$A = \overset{n}{\boxed{\qquad\qquad}}\, m$$

"min" steht hier und im Folgenden für "minimiere".
Die Existenz einer Minimalstelle ist nicht immer gegeben.

Wichtiges Werkzeug: ②

äquivalente Umformung des "Formats":

$$\min\{c^T x \mid \ldots\} = -\max\{-c^T x \mid \ldots\}$$

$$x_i \geq 0 \iff -e_i^T x \leq 0$$

$$e_i = (0 \ldots 0\ \underset{\substack{\uparrow\\ i}}{1}\ 0 \ldots 0)^T$$

"kann in die Matrix & Vektor d mit aufgenommen werden."

Einfügen von neuen (künstlichen) "Schlupfvariablen"

$$u^T x \leq \gamma \iff u^T x + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{neue künstliche Variable}}}{s_i} = \gamma, \quad s_i \geq 0$$

(Gauß-) Elimination von "freien" Variablen....

Derartige Umformungen erlauben die Überführung in folgende

Standardform

(LP) $\quad \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \{ c^T x \mid Ax = b,\ x \geq 0 \}$

Komponentenweise

mit neuen Daten A, b, c (und n).

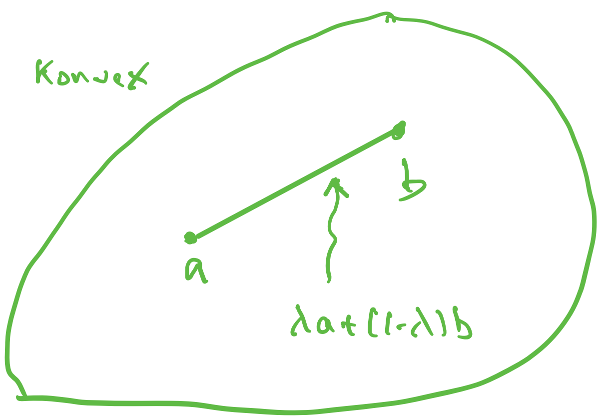
$$A = \underbrace{\overbrace{\boxed{}}^{n}}_{}\, m$$

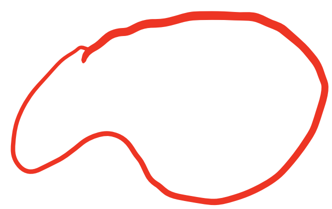
Definition:

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn für $a, b \in M$ und $\lambda \in [0,1]$ stets gilt:

$\lambda a + (1-\lambda) b \in M$.

M $\quad$ Konvex





$\tilde{M}$ nicht konvex

„Einbuchtungen"
oder
„Löcher" oder ....

Satz 1

Der Schnitt von konvexen Mengen ist immer konvex.

Eine Menge $P \subset \mathbb{R}^n$ heißt (4)

(konvexes) Polyeder, wenn P der Schnitt von endlich vielen Halbräumen ist,

$$M = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \leq \beta_i\}$$

mit festen $a_i \in \mathbb{R}^n$, $\beta_i \in \mathbb{R}$.

Bemerkung:

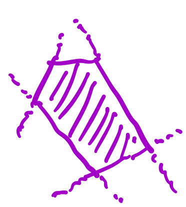
Die <u>zulässige Menge</u> von (LP)

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, \quad x \geq 0\}$$

ist ein Polyeder.

$$\left(\begin{array}{l} x_i \geq 0 \quad \text{wie auf S. 2} \\ a_i^T x = b_i \iff a_i^T x \leq b_i \text{ und } -a_i^T x \leq -b_i \end{array} \right)$$

Bsp $\underline{\mathbb{R}^2}$:

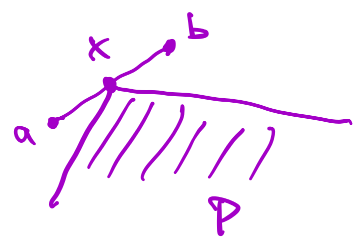


$\underline{\mathbb{R}^3}$:

Charakterisierung von <u>Ecken</u> eines Polyeders P:

x ist Ecke von P $\Leftrightarrow$

$\{a, b \in P,\ \lambda \in (0,1),\ x = \lambda a + (1-\lambda) b \Rightarrow a = b = x\}$



$\mathcal{E}$ ist <u>Extremalmenge</u> von P $\Leftrightarrow$ $\mathcal{E}$ konvex &

$\{a, b \in P,\ \lambda \in (0,1),\ \lambda a + (1-\lambda) b \in \mathcal{E} \Rightarrow a, b \in \mathcal{E}\}$

Eindimensionale Extremalmengen heißen <u>Kanten</u>.

Ein Polyeder braucht keine Ecke zu besitzen.

(Halbräume oder lineare Teilräume sind z.B. Polyeder, die keine Ecken besitzen.)

<u>Satz 2</u>: Falls $P := \{x \mid Ax = b,\ x \geqslant 0\} \neq \emptyset$

so besitzt P mind. eine Ecke.

Beweisskizze:

Wegen $x \geq 0$ enthält P keine Gerade

(Gerade: $\{\bar{x} + \lambda \Delta x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ mind. ein $\Delta x_i \neq 0$.)

Sei $\bar{x} \in P$. Falls $\bar{x}$ keine Ecke so ex $a, b \in P$ und $\lambda \in (0,1)$: $\bar{x} = \lambda a + (1-\lambda) b$, $a \neq b$. $\Rightarrow$ Die Gerade $\{\bar{x} + \rho (b-a) \mid \rho \in \mathbb{R}\}$ schneidet P (mind. ein mal).

Dort "wird ein $x_i = 0$". Wiederhole, falls der Schnittpunkt mit dem Rand von P keine Ecke ist.

#

__Satz 3__

Falls (LP) eine Optimallösung besitzt, dann ist unter den Optimallösungen auch eine Ecke.

Bew: $\tilde{P} := P \cap \{x \mid c^T x = c^T x^{opt}\}$ hat nach Satz 2 eine Ecke $\bar{x}$. Diese ist auch Ecke von P denn in P gilt $c^T x \geq c^T x^{opt}$ so dass für $a, b \in P, \lambda \in (0,1)$ mit $\bar{x} = \lambda a + (1-\lambda) b$ auch $a, b \in \tilde{P}$ folgt. #

__Annahme__ Die Matrix A in der Darstellung von $P := \{x \geq 0 \mid Ax = b\}$ habe stets vollen Zeilenrang.

(ggf. mit Gauß-Elimination überprüfen & redundante Zeilen löschen / Unlösbarkeit identifizieren.)

Def: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Rang m

Spalten von A: $(a_1, \dots, a_n)$. $\mathcal{J} = (j_1, j_2, \dots j_m)$ heißt Basis von A wenn die $j_i \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden sind und $A_{\mathcal{J}} := (a_{j_1}, \dots, a_{j_m})$ invertierbar ist.

Falls $\mathcal{K} = (k_1, \dots, k_{n-m})$ so gegeben ist, dass jeder Index i genau einmal in $\mathcal{J}$ oder $\mathcal{K}$ vorkommt, so heißt $\mathcal{K}$ "komplementär" zu $\mathcal{J}$ und wird auch Nichtbasis genannt.

Beachte: $\mathcal{J}$ und $\mathcal{K}$ sind geordnete Indexvektoren.

Definiert man $A_{\mathcal{K}}$ analog und $x_{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_m} \end{pmatrix}, x_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} x_{k_1} \\ \vdots \\ x_{k_{n-m}} \end{pmatrix}$

so gilt

$$Ax = b \iff A_{\mathcal{J}} x_{\mathcal{J}} + A_{\mathcal{K}} x_{\mathcal{K}} = b.$$

Def.

Zu einer Basis J ist die Basislösung gegeben durch $x(J) := \begin{pmatrix} x_J \\ x_K \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_J^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$

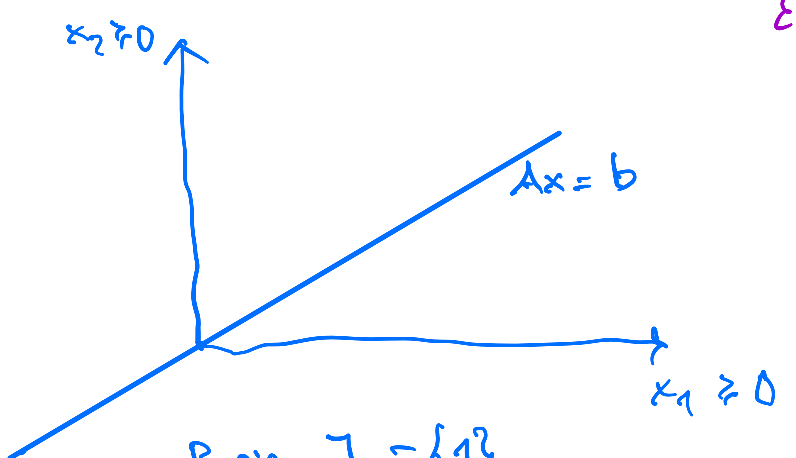
$$\left(A \cdot x(J) = A_J x_J + A_K x_K = A_J A_J^{-1} b + A_K \cdot 0 = b \right)$$

Falls $x(J) \geq 0$ heißt J zulässige Basis.

Satz 4

Zu jeder Ecke $\bar{x}$ aus $P = \{x \geq 0 \mid Ax = b\}$ ex. eine Basis J, so dass $\bar{x} = x(J)$ und zu jeder zul. Basis J ist $x(J)$ eine Ecke von P.

(Zu $\bar{x}$ kann es mehrere Basen J geben mit $\bar{x} = x(J)$.)
"Entartung"



Basis $J_1 = \{1\}$
$J_2 = \{2\}$.

Beweis:

Sei $\bar{x}$ Ecke von P und $S(\bar{x}) := \{\ell \mid x_\ell > 0\}$
die Menge der "nicht aktiven" Indices in $\bar{x}$

Beh: $\{a_\ell\}_{\ell \in S(\bar{x})}$ ist linear unabhängig.

Wäre dies nicht so so gäbe es $\beta \not\equiv 0$ mit
$\sum_{\ell \in S(\bar{x})} \beta_\ell a_\ell = 0$. Setze $\Delta x_\ell = \beta_\ell$ falls $\beta_\ell \neq 0$
$\Delta x_\ell = 0$ sonst

$\Rightarrow A \Delta x = 0$.

Da $\Delta x_\ell = 0$ für $\ell \notin S(\bar{x})$ ex. $\varepsilon > 0$ so dass
$\bar{x} \pm \varepsilon \Delta x \geq 0$. $\Rightarrow$ $\bar{x} \pm \varepsilon \Delta x \in P$

$\Rightarrow$ $\bar{x} = \frac{1}{2}(\bar{x} + \varepsilon \Delta x) + \frac{1}{2}(\bar{x} - \varepsilon \Delta x)$ ist keine Ecke $\lightning$

Also ist $S(\bar{x})$ (in beliebiger Reihenfolge) eine Basis oder kann zu einer Basis ergänzt werden.
Nach Definition von $S(\bar{x})$ ist $\bar{x}$ Basislösung zu $S(\bar{x})$.

Sei nun J eine zul. Basis mit $x = x(J) \geq 0$.
Sei $x = \lambda y + (1-\lambda) z$ mit $y, z \in P$, $\lambda \in (0,1)$.
Für $k \in K$ folgt $0 = x_k = \underbrace{\lambda}_{>0} \underbrace{y_k}_{\geq 0} + \underbrace{(1-\lambda)}_{>0} \underbrace{z_k}_{\geq 0}$

$\Rightarrow y_k = z_k = 0$

Somit:

$$0 = b - b = A\underbrace{y}_{y \in P} - A\underbrace{z}_{z \in P} = A(y-z) = \sum_{j \in J} a_j (y_j - z_j)$$

$y_k = z_k = 0$ für $k \notin J$

Da die $\{A_j\}_{j \in J}$ lin. unabhängig sind, folgt

$y_j = z_j \quad \forall j \in J. \qquad (y_k = z_k = 0$ sonst$)$

$\Rightarrow y = z \Rightarrow x$ ist Ecke. #

Simplexmethode: Durchführung

Ziel: Iterativer Wechsel von einer Ecke zu einer $\boxed{\text{benachbarten}}$ Ecke mit niedrigerem "Zielfunktionswert" $c^T x$.

Fragen: Wie charakterisiert man $\boxed{\text{benachbart}}$?

Gibt es solche benachbarten Ecken?

<u>Def:</u> Zwei Basen $J = (j_1, \dots, j_m)$ und J' heißen <u>benachbart</u>, falls es $k \notin J$ und $r \in \{1, \dots, m\}$ gibt, so dass

$$J' = (j_1, \dots, j_{r-1}, k, j_{r+1}, \dots, j_m).$$

Falls $x(J) \neq x(J')$ und $x(J) \geq 0$ sowie $x(J') \geq 0$ gilt, so sind $x(J)$ und $x(J')$ <u>benachbarte Ecken</u>, andernfalls sind J und J' zwei Basen zur selben Ecke.

Benachbarte Ecken sind durch eine Kante (eindimensionale Extremalmenge) verbunden.

Satz 5 Falls $\bar{x}$ eine nicht optimale Ecke von P ist, so geht von $\bar{x}$ eine eindimensionale Extremalmenge aus, entlang derer $c^T x$ strikt abnimmt und die entweder unbeschränkt ist, oder zu einer benachbarten Ecke $\tilde{x}$ führt. (2)

(Ohne Beweis)

Erinnerung:

$$Ax = b \iff A_J x_J + A_K x_K = b$$

$$\iff A_J^{-1}(A_J x_J + A_K x_K) = A_J^{-1} b =: \bar{b}$$

$$\iff x_J + \underbrace{A_J^{-1} A_K}_{=: \bar{A}_K} x_K = \bar{b}$$

Mit $x_K := 0$ folgt $x_J = \bar{b}$.

Sei $\bar{x} = x(J) := \begin{pmatrix} x_J \\ x_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_J^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$

eine Ecke von P mit $\bar{b} > 0$.

Bestimmung einer "absteigenden Kante":

Für ein $\tilde{k} \in K$ setze $x_{\tilde{k}}(t) = t \geq 0$.

Für die restlichen $k \in K$ gelte $x_k(t) \equiv 0$.

Damit $Ax(t) \equiv b$ gilt muss

$\bar{b} \overset{!}{=} x_J(t) + \bar{A}_K x_K(t) = x_J(t) + t\bar{A}_{\tilde{k}}$ gelten,

d.h. $x_J(t) = \bar{b} - t\bar{A}_{\tilde{k}}$.

Es ist
$$c^T x(t) = c_J^T x_J(t) + c_{\tilde{k}} \cdot t$$
$$= c_J^T \bar{b} + t\,\underbrace{(c_{\tilde{k}} - c_J^T \bar{A}_{\tilde{k}})}_{\overset{!}{<} 0}$$

$\Rightarrow$ Für $k \in K$ bestimme die Werte $c_k - c_J^T \bar{A}_k$.

wähle $\tilde{k}$ mit $c_{\tilde{k}} - c_J^T \bar{A}_{\tilde{k}} < 0$.

Falls kein solches $\tilde{k}$ ex. ist $x(J)$ eine optimale Ecke.

Wegen $\bar{b} > 0$ ist $x(t) \geq 0$ für kleine $t > 0$.

Entweder $\bar{A}_{\tilde{k}} \leq 0 \Rightarrow x(t) \in P \quad \forall t \geq 0$

oder es gibt t_{max} so dass $x(t_{max}) \geq 0$

und $x(t_{max} + \varepsilon) \ngeq 0 \quad \forall \varepsilon > 0$.

$\exists_{\tilde{j} \in J} : \left(x(t_{max})\right)_{\tilde{j}} = 0$

Dann ist $J' := J \setminus \{\tilde{j}\} \cup \{\tilde{k}\}$ eine benachbarte Ecke mit $c^T x(J') < c^T x(J)$.

Aktualisierung von $\bar{A} = (I \ \bar{A}_K)$ beim Wechsel von J zu J':

Sei $\bar{A}_{\tilde{k}} =: \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ mit $\alpha_{\tilde{j}} \neq 0$ (!)

Setze

$$F := \begin{pmatrix} 1 & & & -\alpha_1/\alpha_{\tilde{j}} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & -\alpha_{\tilde{j}-1}/\alpha_{\tilde{j}} & & & \\ & & & 1/\alpha_{\tilde{j}} & & & \\ & & & -\alpha_{\tilde{j}+1}/\alpha_{\tilde{j}} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -\alpha_m/\alpha_{\tilde{j}} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Frobeniusmatrix etwas allgemeiner als bei der LR-Zerlegung. Dann gilt: ⑤

$$\bar{\bar{A}} := F \cdot \bar{A} = F \cdot (I \;\; \bar{A}_K)$$

$$= \begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & & & -\alpha_1/\alpha_{\tilde j} & & & & \bar{\bar a}_{1k_1} & \cdots & \bar{\bar a}_{1k_{\tilde k-1}} & 0 & \bar{\bar a}_{1k_{\tilde k+1}} & \cdots & \bar{\bar a}_{1k_{n-m}} \\
 & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
 & & 1 & -\alpha_{\tilde j-1}/\alpha_{\tilde j} & & & & \vdots & & \vdots & 0 & & & \vdots \\
 & & & 1/\alpha_{\tilde j} & & & & \vdots & & \vdots & 1 & & & \vdots \\
 & & & -\alpha_{\tilde j+1}/\alpha_{\tilde j} & 1 & & & \vdots & & \vdots & 0 & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & & & & \vdots & & & \\
 & & & -\alpha_m/\alpha_{\tilde j} & & & 1 & \bar{\bar a}_{mk_1} & \cdots & \bar{\bar a}_{mk_{\tilde k-1}} & 0 & \bar{\bar a}_{mk_{\tilde k+1}} & \cdots & \bar{\bar a}_{mk_{n-m}}
\end{pmatrix} \\
\quad J' \qquad\qquad\qquad\qquad J' \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad J' \qquad\qquad\qquad
\end{array}$$

d.h. $\bar{\bar{A}}_{J'} = I$

Sofern stets $\bar{b} > 0$ gilt nimmt der Zielfunktionwert $c^T x$ in jedem Schritt strikt ab. Da es nur endlich viele verschiedene Basen gibt, muss die Wiederholung von obigem Eckenwechsel entweder mit einer optimalen Ecke abbrechen oder mit der Information dass der Optimalwert $-\infty$ ist.

Probleme

- Falls $\bar{b} \not> 0$ "Entartung" ist ggf nur ein Wechsel zu einer benachbarten Basis möglich, die aber zur selben Ecke gehört. Dann kann die Simplexmethode "zykeln". (Theoretisch: Anti-Zykel-Strategien).

- Um eine erste zulässige Basis zu bestimmen, kann ein Hilfsproblem genutzt werden, das auch ein lineares Programm ist, für das aber eine zulässige Basis leicht zu bestimmen ist.

Dualität

Eine Betrachtung der optimalen Ecke, die mittels (Anti-Zykel-) Simplex-Methode gefunden werden kann liefert folgenden Satz:

Dualitätssatz der linearen Optimierung

Falls

(LP) $\min c^T x \mid Ax = b,\ x \geq 0$

oder

(LD) $\max b^T y \mid A^T y + s = c,\ s \geq 0$

einen zulässigen Punkt besitzt, so stimmen die Optimalwerte überein.

$(\min c^T x \mid x \in \emptyset := \infty,\ \max b^T y \mid y \in \emptyset := -\infty)$

Wenn der Optimalwert endlich ist, so ex. x^{opt} zulässig für (LP) sowie y^{opt}, s^{opt} zul. für (LD) mit $c^T x^{opt} = b^T y^{opt}$ sowie $(x^{opt})^T s^{opt} = 0$.

- x zul. für (LP) y, s zul. für (LD) $\Rightarrow$

$$c^T x - b^T y = c^T x - (Ax)^T y = x^T c - x^T A^T y = x^T (c - A^T y) = x^T s \geq 0.$$