

## ÜBUNGEN ZUR NUMERIK I

**39. (2 + 2 Punkte)** Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem  $\min_{x \in \mathbb{R}^3} \|Ax - b\|_2$  für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung (a) der zugehörigen Normalengleichung und (b) der QR-Zerlegung.

**40. (5 Punkte)** Wir betrachten im Folgenden die Integralgleichung

$$y(x) = g(x) + \int_0^1 K(x, t)y(t)^2 dt$$

für  $K \in C([0, 1]^2)$  und  $g \in C([0, 1])$ . Finden Sie geeignete Bedingungen an die Funktionen  $K$  und  $g$ , so dass die Integralgleichung eine stetige Lösung besitzt. In welchem Sinn ist diese eindeutig? In  $C([0, 1])$ ? Existieren auch Lösungen, falls die von Ihnen gefundene Bedingung nicht erfüllt ist? Sind diese eindeutig?

Hinweis: Vergessen Sie nicht die Anwendbarkeit des Fixpunktsatzes zu begründen, falls Sie einen verwenden.

**41. (1 + 4 + 1 Punkte, Fixpunktsatz von Edelstein)**

- Finden Sie ein Beispiel einer Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die zwar Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L = 1$  ist, aber keinerlei Fixpunkte besitzt.
- Es seien  $(X, d)$  ein kompakter metrischer Raum und  $f: X \rightarrow X$  mit  $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$  für alle  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$ . Zeigen Sie: Dann besitzt  $f$  einen eindeutigen Fixpunkt und die Folge  $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen diesen für jedes  $x_0 \in X$ .
- Geben Sie ein Beispiel an für das der Banachsche Fixpunktsatz nicht die Existenz eines Fixpunktes liefert, der Fixpunktsatz von Edelstein aber schon.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $g(x) = d(x, f(x))$ . In dieser Aufgabe ist mit  $f^n(x)$  wieder die  $n$ -fache Verkettung von  $f$  mit sich gemeint.

Bitte wenden!

**42. (3 Punkte)** Zur Bestimmung der Lösung  $x^*$  von  $e^x - 1 = 0$  soll das Newton-Verfahren verwendet werden.

- (a) Geben Sie die Iterationsvorschrift an.
- (b) Zeigen Sie, dass das Verfahren für alle  $x_0 \in \mathbb{R}$  konvergiert.
- (c) Zeigen Sie, dass die Konvergenz für große  $x_0$  langsam in dem Sinne ist, dass  $|x_n - x^*| \geq 1$  für alle  $x_0 \geq n + 1$  gilt.

**Programmieraufgabe 11 (3 Punkte)**

- (a) Implementieren Sie eine Funktion `linearLSQNormal(A, b)` die mit Hilfe der Normalengleichung und Cholesky-Zerlegung das lineare Ausgleichsproblem zu  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $b \in \mathbb{R}^n$ , für  $m \geq n$ , löst.
- (b) Implementieren Sie eine Funktion `linearLSQQR(A, b)` die mit Hilfe der QR Zerlegung das selbe lineare Ausgleichsproblem löst wie in (a).
- (c) Vergleichen Sie die Stabilität der beiden Funktionen aus (a) und (b).

Hinweis: Verwenden Sie die Funktion `np.linalg.cholesky` und Ihre Ergebnisse aus den Programmieraufgaben 09 und 10.

**Abgabe:** elektronisch bis Mo., 12.07., 12.00 Uhr  
**Besprechung:** 12.07. - 14.07., in den Übungen