

ÜBUNGEN ZUR NUMERIK I

24. (2 + 2 + 3 + 3 Punkte)

- Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz einer standard-normal verteilten Zufallsvariable, d.h. berechnen Sie $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x dx$ und $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^2 dx$
- Berechnen Sie die ersten vier Hermite-Polynome $H_n(x)$ für $0 \leq n \leq 3$ und finden Sie deren Nullstellen.
- Bestimmen Sie die Gewichte der Quadraturformeln bis zur Ordnung 2 (d.h. mit maximal 3 Knoten) für die Integration über $(-\infty, \infty)$ mit der Gewichtsfunktion $w(x) = e^{-x^2}$. Diese sind die sog. Gauß-Hermite Quadraturformeln.
- Approximieren Sie die Varianz einer standard-normal verteilten Zufallsvariable mit Hilfe
 - von einer Gauß-Hermite Quadraturformel erster Ordnung (d.h. mit 2 Knoten),
 - von einer Gauß-Quadraturformel zweiter Ordnung (d.h. mit 3 Knoten) zusammen mit der Transformation $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$.

Hinweis: In der Aufgabe dürfen Sie die Normiertheit der standard-normal Verteilung voraussetzen, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Außerdem: Die Gewichte einer Quadraturformel mit nicht konstanter Gewichtsfunktion berechnen sich, in Anlehnung an die Gauß-Legendre Quadraturformeln, über $a_i = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) l_{in}(x) dx$.

25. (2 + 1 + 3 Punkte) Es seien die Knoten

$$x_0 = -1, \quad x_1 = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad x_3 = 1$$

gegeben.

- Berechnen Sie die Gewichte a_i , $0 \leq i \leq 3$ zur interpolatorischen Quadraturformel $Q(f) = \sum_{i=0}^3 a_i f(x_i)$ zur Approximation von $\int_{-1}^1 f(x) dx$ zu den gegebenen Knoten.
- Bestimmen Sie den Exaktheitsgrad der resultierenden Quadraturformel.
- Approximieren Sie mit Hilfe dieser Quadraturformel (indem Sie diese transformieren) das Integral $\int_2^4 \frac{x+1}{x-1} dx$ und vergleichen Sie mit dem tatsächlichen Wert.

Bitte wenden!

Programmieraufgabe 7 (3 + 3 Punkte)

- (a) Schreiben Sie eine Funktion `gauss(n)`, die die Knoten und Gewichte der Gauß-Quadraturformel mit $n+1$ Knoten berechnet und zurück gibt nach dem in Abschnitt 3.4.4 beschriebenen Schema.
- (b) Nutzen Sie die Funktion aus (a) und `chainedQuad` von Programmieraufgabe 5 um den Einfluss von verschiedenen Werten von Anzahl an Knoten in der Quadraturformel bzw. unterschiedlich vielen Iterationen der Quadraturformel zu untersuchen, bei Integration von $f(x) = \exp(x)$ auf dem Intervall $[-3, 3]$.

Hinweis: Beachten Sie die Dokumentation zu `chainedQuad`.

Abgabe: elektronisch bis Mo., 14.06., 12.00 Uhr

Besprechung: 14.06. - 16.06., in den Übungen