Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. Florian Jarre
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
25.05.2021
Blatt 06

ÜBUNGEN ZUR NUMERIK I

20. (2 Punkte) Zeigen Sie Bemerkung 3.15 (1), dass also die erste Approximation im Romberg-Verfahren, die nicht bloß Trapez-Summen involviert der Simpson-Regel gleichen.

21. (2 + 3 Punkte) Es bezeichne $B_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ die Bernoulli-Polynome.

(a) Berechnen Sie die ersten sieben Bernoulli-Zahlen, also B_n für $0 \leq n \leq 6$.

(b) Zeigen Sie die Reflexion-Formel $B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$ für $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}_0$

22. (3 + 4 Punkte, Faulhaber-Formeln) Zeigen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung bewiesenen Eulerschen Summenformel die Identitäten

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

23. (5 Punkte) Mit der Eulerschen Summenformel ist es ebenfalls möglich die Ihnen wahrscheinlich schon aus der Analysis I bekannte Stirlingsche Formel $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ für $n \to \infty$ zu verschärfen[1], d.h. nicht bloß die asymptotische Äquivalenz festzustellen sondern auch den Approximationsfehler von beliebig hoher Ordnung genau zu berechnen.

Zeigen Sie also, mit der Eulerschen Summenformel aus der Vorlesung, die Identität

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Bitte wenden!

[1]Hierbei bedeutet die Notation $f(n) \sim g(n)$ für $n \to \infty$, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$. Sie dürfen diese Variante der Stirlingschen Formel für das Lösen der Aufgabe verwenden.

Programmieraufgabe 6 (6 + 3 + 1 Punkte) Ihre Aufgabe wird es hier sein eine adaptive Variante des aus der Vorlesung bekannten Romberg-Verfahrens zu implementieren. Mit adaptiv ist folgendes gemeint: in den Beispielen der Vorlesung wird beim Romberg-Verfahren immer vorher angegeben wie viele Schritte/Gitter-Verfeinerungen benutzt werden sollen für die approximation des Integrals, z.B. in Bemerkung 3.15 (3) werden 12 Gitter verwendet von denen sich letztlich aber bloß 3 als nötig erweisen um die gewünsche Anzahl an Stellen Genauigkeit zu erreichen.

(a) Schreiben Sie eine Funktion `romberg(a, b, f, eps=10**-15)`, die die gegebene Funktion `f` auf dem Interval (a, b) integriert mit einem adaptiven Romberg-Verfahren (mit der Romberg-Folge) bis zur Fehlergenauigkeit `eps`. Merke: Es wird keine Anzahl zu verwendender Gitterabstufungen angegeben. Ihre Funktion soll selbstständig entscheiden, anhand der bisher erreichten Genauigkeit, ob eine weitere Verfeinerung des Gitters sinnvoll ist. Dabei sollten Sie die Funktion `f` nicht häufiger als nötig aufrufen, versuchen Sie außerdem darauf zu achten möglichst wenig Speicherplatz zu verwenden (bei steigender Feinheit des Gitters wird das nämlich sonst zum Verhängnis).

(b) Vergleichen Sie die Genauigkeit des Romberg-Verfahrens mit den drei iterierten Quadraturformeln aus der fünften Programmieraufgabe[2] und der ebenfalls dort zu findenden Funktion. Plotten Sie dabei die Approximations-Genauigkeit gegen die Anzahl der Aufrufe der zu integrierenden Funktion.

(c) Um die Funktionen $f_n\colon (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x - \pi)^4 \cos(2^n x)$, $n \in \mathbb{N}$ über ihren Definitionsbereich zu integrieren funktioniert das von Ihnen implementierte Romberg-Verfahren nicht gut. Warum? (Diese Art Integrale treten bei der Berechnung von Fourier-Transformierten von Funktionen auf.)

Abgabe: elektronisch bis Di., 07.06., 12.00 Uhr
Besprechung: 07.06. - 09.06., in den Übungen

[2]Hierfür dürfen Sie auch die auf der Homepage zur Verfügung gestellte Musterlösung verwenden, falls Sie nicht auf Ihren eigenen Code zurückgreifen möchten oder können.