11. Tutorium zur Funktionentheorie am 15.07.21

In der Vorlesung wurden isolierte Singularitäten in drei Klassen eingeteilt:

1. Hebbare Singularitäten;
2. Polstellen der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, und
3. wesentliche Singularitäten.

Aufg.: Bestimmen Sie alle Singularitäten und deren Typ für die folgenden Funktionen:

(a) $f(z) = \dfrac{1-\cos(z)}{z^3}$ (b) $f(z) = (z-1)\, e^{\frac{1}{1-z}}$

(c) $f(z) = \dfrac{z}{\sin(z)}$ (d) $f(z) = \dfrac{z^2}{(1+z)^3}$.

Berechnen Sie (zur Übung) auch die entsprechenden Residuen!

In erster Linie haben wir den Residuensatz verwendet, um bestimmte zumeist uneigentliche reelle Integrale zu berechnen. Zu den "Funktionentheoretischen Konsequenzen" des Residuensatzes gehört der

<u>Satz von Rouché:</u> Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, γ ein geschlossener Weg in Ω, der in Ω nullhomolog ist, und $A := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\gamma) : n(\gamma, z) = 1\}$. Für alle $z \notin A \cup \text{Bild}(\gamma)$ gelte $n(\gamma, z) = 0$. $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ seien holomorphe Funktionen, so dass $\forall z \in \text{Bild}(\gamma)$:

$$(i) \quad f(z) \neq 0 \quad \text{und} \quad (ii) \quad |f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|.$$

Dann besitzen f und g in A unter Berücksichtigung der Vielfachheiten gleich viele Nullstellen.

Aufg.: Für $\lambda > 1$ ist gefragt nach der Anzahl und (ungefähren) Lage der Lösungen der Gleichung

$$e^{-z} = \lambda - z$$

in der rechten Halbebene $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : x > 0\}$. Untersuchen Sie diese Frage

(a) mit Hilfe des Satzes von Rouché und

(b) durch Zerlegung der Gleichung in Real- und Imaginärteil.