8. Potenzreihenentwicklung

Mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel haben wir eingesehen können, dass jede holomorphe Funktion $f: \Omega \to \mathbb{C}$ beliebig oft komplex differenzierbar ist. Es gilt sogar die stärkere Aussage: Zu jedem $z_0 \in \Omega$ gibt es eine Umgebung U von z_0, so dass f in U als Potenzreihe dargestellt werden kann. Das ist auch für eine C^∞-Funktion keineswegs selbstverständlich!

Bsp.: $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & : x > 0. \end{cases}$$

Dann ist φ unendlich oft differenzierbar. Um dies für $x = 0$ einzusehen, zeigt man induktiv: zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ existiert ein Polynom P_n, so dass

$$\varphi^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} & : x > 0. \end{cases}$$

φ kann aber in keinem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ um den Nullpunkt als Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ dargestellt werden. In diesem Fall wäre nämlich für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$0 = \varphi^{(n)}(0) = P^{(n)}(0) = n! \cdot a_n,$$

also $P(x) = 0 \neq \varphi(x)$ für alle $x \in (0, \varepsilon)$.

Def.: Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f: \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt f

(a) in $z_0 \in \Omega$ in eine Potenzreihe entwickelbar, wenn es eine Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ und ein $\varepsilon \in (0,R)$ gibt, so dass $B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$ und $f(z) = P(z)$ für alle $z \in B_\varepsilon(z_0)$;

(b) komplex analytisch, wenn f um jedes $z_0 \in \Omega$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist.

Satz 1: Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$ und $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann konvergiert die Taylorreihe

$$Tf(z; z_0) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

von f um z_0 auf jeder offenen Kreisscheibe $B_r(z_0) \subset \Omega$ gegen f.

Bem.: (1) Jede holomorphe Funktion ist demnach komplex analytisch.

(2) Für den Konvergenzradius R von $Tf(z;z_0)$ gilt also $R \geq \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Im Fall $\Omega = \mathbb{C}$ ist $R = \infty$. Wie jede Potenzreihe konvergiert $Tf(z;z_0)$ normal.

(3) Nach der Cauchyschen Integralformel für die Ableitungen gilt für die Taylorkoeffizienten

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial B_r(z_0)^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi,$$

wobei $r \in (0, \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega))$ ein beliebiger Radius ist. Diese Identität wird im Beweis verwendet.

Bew.: Sei $z \in \Omega$ mit $|z - z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Wir wählen $r > |z - z_0|$, so dass $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Nach der Cauchyschen Integralformel für f ist dann

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi .$$

Wir schreiben

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi \cancel{- z_0} \cancel{+ z_0} - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} ,$$

wobei $w := \frac{z - z_0}{\xi - z_0}$ den Betrag $|w| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$ hat, so dass die geometrische Reihe $\frac{1}{1-w} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k$ auf

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\xi - z_0)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\xi - z_0)^{k+1}}$$

führt. Diese Reihe konvergiert bei festem z gleichmäßig in $\xi \in \partial B_r(z_0)$, so dass wir Integration und Summation vertauschen können. Das ergibt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)^+} f(\xi) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\xi - z_0)^{k+1}} \, d\xi$$

Cauchy

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} \, d\xi \right) (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k,$$

wie behauptet. □

Bem. zur Größe der Taylorkoeffizienten: Die Standardabschätzung ergibt für jedes $r \in (0, \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega))$ die Ungleichung

$$\frac{|f^{(k)}(z_0)|}{k!} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \int_{\partial B_r(z_0)^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} \, d\xi \right| \leq \frac{1}{r^k} \| f \|_{\partial B_r(z_0)} .$$

Das kann man auch schärfer abschätzen: Schreiben wir $a_k := \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ und $\xi = z_0 + re^{it} = \gamma(t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$, so wird (mit $\gamma'(t) = ire^{it} = i(\xi - z_0)$)

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} \, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{r^k e^{ikt}} \, dt$$

bzw.

$$a_k \cdot r^k = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{ikt}) e^{-ikt} \, dt . \quad (*)$$

Nun berechnen wir

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{it})|^2 dt \qquad \text{ersetze } \overline{f(z_0+re^{it})} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^n e^{-int}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it}) \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^n e^{-int} dt$$

$$\underset{\text{Konv}}{\overset{\text{glm.}}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^n \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it}) e^{-int} dt$$

$$\underset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}. \quad \text{Also:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right|^2 \cdot r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{it})|^2 dt \le \|f\|^2_{\partial B_r(z_0)}$$

Die darin enthaltene Gleichung wird als "Gutzmersche Identität" bezeichnet.

Sind Ω, z_0, f wie in Satz 1 und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ irgendeine Reihendarstellung von f mit Entwicklungspunkt z_0, so gilt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Die Koeffizienten sind also durch f und z_0 eindeutig festgelegt. Wenn es eine Reihendarstellung gibt, dann handelt es sich um die Taylorreihe. Dies folgt aus dem nachstehenden

Satz 2 (Identitätssatz für Potenzreihen): Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Menge mit Häufungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Die Potenzreihen $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ und $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ seien für alle $z \in M$ konvergent und es gelte $P|_M = Q|_M$. Dann ist $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Bew.: Wir können o.E. $Q = 0$ annehmen, sonst betrachte man $P-Q$. Dann ist $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen. Nun sei $(z_k)_k$ eine Folge in M mit $\lim_{k\to\infty} z_k = z_0$. Dann ist wegen der Stetigkeit von P

$$a_0 = P(z_0) = \lim_{k\to\infty} P(z_k) = 0.$$

Ist $a_0 = \dots = a_{n-1} = 0$ bereits gezeigt, so gilt

$$0 = \frac{P(z_k)}{(z_k-z_0)^n} = \frac{1}{(z_k-z_0)^n} \cdot \sum_{j=n}^{\infty} a_j (z_k-z_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+n} (z_k-z_0)^j$$

und daher $a_n = \lim_{k\to\infty} \frac{P(z_k)}{(z_k-z_0)^n} = 0$. $\square$

Mit Hilfe von Satz 1 können wir hieraus einen entsprechenden Identitätssatz für holomorphe Funktionen gewinnen:

Satz 3: Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $M \subset G$ eine Menge, die einen Häufungspunkt $z_0 \in G$ besitzt. $f, g : G \to \mathbb{C}$ seien holomorphe Funktionen, die auf M übereinstimmen. Dann gilt bereits $f = g$.

Bew.: Wieder sei $g=0$ angenommen, also $f|_M = 0$. Nach Satz 1 existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $z \in B_{\varepsilon_0}(z_0)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Nach Satz 2 ist dann $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$,

also $f|_{B_{\varepsilon_0}(z_0)} = 0$. Nun setzen wir

$$N := \{z \in G : f^{(n)}(z) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Dann ist $N \neq \emptyset$, weil $z_0 \in N$, und

$$N = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{z \in G : f^{(n)}(z) = 0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (f^{(n)})^{-1}(\{0\})$$

abgeschlossen als Durchschnitt der abgeschlossenen Urbilder von $\{0\}$ unter den stetigen Funktionen $f^{(n)}$. Andererseits: Ist $z_1 \in N$, also $f^{(n)}(z_1) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so existiert – wieder nach Satz 1 – ein $\varepsilon_1 > 0$, so dass für alle $z \in B_{\varepsilon_1}(z_1)$ gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}(z-z_1)^n = 0,$$

d.h. $f|_{B_{\varepsilon_1}(z_1)} = 0$ und damit $f^{(n)}(z) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ und $\forall z \in B_{\varepsilon_1}(z_1)$. Folglich ist $B_{\varepsilon_1}(z_1) \subset N$ und damit N offen. G ist zusammenhängend und $N \neq \emptyset$ sowohl offen, als auch abgeschlossen. Damit gilt $N = G$, speziell $f|_G = 0$. $\square$

Bsp.: (1) Ist $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und $(z_n)_n$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$, so dass $f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt bereits $f = 0$. Ebenso reicht $f|_C = 0$ für ein (winziges) Kurvenstück $C \subset \mathbb{C}$ aus, um f als die Nullfunktion zu identifizieren.

(2) Besitzt die Menge M im Gebiet G keinen Häufungspunkt, wird die Aussage falsch: $f(z) = \sin(z)$ und allgemeiner $f_\lambda(z) = \lambda \sin(z)$ $(\lambda \neq 0)$ sind von der Nullfunktion ~~[illegible]~~ verschieden, stimmen aber mit dieser auf $\pi\mathbb{Z}$ überein.

Mit der Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe hat eine differenzierbare Funktion (im Hinblick auf ihre Regularität) alles erreicht, was möglich ist. Insofern ist jetzt die Gelegenheit, unsere diesbezüglichen Ergebnisse zu einem Satz zusammenzufassen.

Satz 4 (Charakterisierungen holomorpher Funktionen):

Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f = g + ih : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(1) f ist holomorph, d.h. in jedem $z \in \Omega$ komplex differenzierbar.

(2) f ist reell differenzierbar und genügt in Ω den Cauchy-Riemannschen Dgln.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}$$

bzw. im Wirtinger-Kalkül $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

(3) f ist stetig und für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset \Omega$ gilt $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

(4) f ist stetig und besitzt auf jedem sternförmigen Teilgebiet von Ω eine Stammfunktion.

(5) f ist beliebig oft komplex differenzierbar.

(6) f ist komplex analytisch.

Ferner ist f genau dann holomorph mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$, wenn f konform und orientierungserhaltend[1] ist.

[1] d.h. $\det Df(z) > 0 \quad \forall z \in \Omega$

Zitate: (1) $\Longleftrightarrow$ (2) Sätze 2 und 3 in Abschnitt 3.

(1) $\Rightarrow$ (3) Satz von Goursat, Abschnitt 6.

(3) $\Rightarrow$ (1) Satz von Morera, Abschnitt 7.

(3) $\Rightarrow$ (4) Lemma 1 in Abschnitt 6

(4) $\Rightarrow$ (3) Eigenschaft einer Stammfunktion, Satz 4 in Abschnitt 5.

(1) $\Rightarrow$ (6) Konvergenz der Taylorreihe, Satz 1 in diesem Abschnitt.

(6) $\Rightarrow$ (5) Differenzierbarkeit von Potenzreihen, Satz 2 in Abschnitt 8

(5) $\Rightarrow$ (1) trivial.

Zusatz: "$\Rightarrow$" Lemma 1 in Abschnitt 4, wenn man beachtet, dass für holomorphes f $\det Df(z) \underset{\text{C.R.Dglen.}}{=} |\nabla g(z)|^2$ $= |\nabla h(z)|^2 \geq 0$ (hier: >0).

Die andere Richtung bleibt nachzutragen. Sei also f konform in $z \in \Omega$ und $\det Df(z) > 0$. Dann gilt für ein $\delta > 0$

$$Df(z)^T Df(z) = \delta^2 E_2 \Longrightarrow \begin{cases} Df(z)^{-1} = \frac{1}{\delta^2} Df(z)^T \\ |\det Df(z)| = \det Df(z) = \delta^2 \end{cases}$$

$$\underset{\text{Inverse einer 2x2-Matrix}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{\delta^2}\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial y}(z) & -\frac{\partial g}{\partial y}(z) \\ -\frac{\partial h}{\partial x}(z) & \frac{\partial g}{\partial x}(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta^2}\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(z) & \frac{\partial h}{\partial x}(z) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(z) & \frac{\partial h}{\partial y}(z) \end{pmatrix}$$

woraus wir die Cauchy-Riemannschen Dglen.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(z) = \frac{\partial h}{\partial y}(z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(z) = -\frac{\partial h}{\partial x}(z)$$

ablesen können.

Zum Abschluss dieses Abschnitts möchte ich noch ein etwas umfangreicheres Bsp. zum Thema Potenzreihenentwicklung diskutieren, bei dem gleich mehrere unserer bisherigen Ergebnisse angesprochen werden.

Bsp. (Bernoulli-Zahlen und die Taylorreihen von $z\cdot\cot(z)$, $\tan(z)$ und $\frac{z}{\sin(z)}$):

Wir starten mit der Funktion

$$f_0 : B_{2\pi}(0)\setminus\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f_0(z) := \frac{z}{e^z-1}.$$

f_0 ist eine holomorphe Funktion, die durch

$$f_0(z)+\frac{z}{2} = \frac{z}{2}\left(1+\frac{2}{e^z-1}\right) = \frac{z}{2}\cdot\frac{e^z+1}{e^z-1} = \frac{z}{2}\,\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}$$

$$= \frac{z}{2}\cdot\coth\left(\frac{z}{2}\right)$$

mit den Hyperbelfunktionen und darüber mit den trigonometrischen Funktionen verknüpft ist. (Es gilt $\cosh(z)=\cos(iz)$, $\sinh(z)=-i\sin(iz)$ und daher $\coth(z)=i\cot(iz)$.) Wegen

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = \exp'(0)=\exp(0)=1$$

können wir f_0 stetig fortsetzen zu

$$f : B_{2\pi}(0) \to \mathbb{C},\ z\mapsto f(z) := \begin{cases} 1 & ,\ z=0 \\ f_0(z) & ,\ 0<|z|<2\pi. \end{cases}$$

Nach der Folgerung aus dem Satz von Morera ist f holomorph und der Satz 1 aus diesem Abschnitt erlaubt die Entwicklung von f in eine Potenzreihe:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n ,$$

die auf $B_{2\pi}(0)$ konvergiert. Wegen

$$\lim_{z \to 2\pi i} |f(z)| = \lim_{z \to 2\pi i} \left| \frac{z}{e^z - 1} \right| = \infty$$

ist der Konvergenzradius dieser Reihe auch exakt $R = 2\pi$; wäre er größer, würde die Reihe gegen eine in $z_1 = 2\pi i$ stetige Funktion konvergieren und der o.g. $\lim_{z \to 2\pi i} \ldots$ müsste endlich ausfallen.

Die Zahlen B_n, die man hier als Koeffizienten der Reihe angesetzt hat, werden als Bernoulli-Zahlen bezeichnet, was wir hier als Definition dieser Zahlen auffassen. (Sie wurden 1713 von Jakob Bernoulli im Zusammenhang mit Potenzsummen eingeführt, s.u..)

Bestimmung der Bernoulli-Zahlen: Der naheliegende Versuch, die B_n als Taylorkoeffizienten nach $B_n = f^{(n)}(0)$ zu berechnen, führt nicht zum Ziel. Die Ableitungen von f bzw. des coth werden zu kompliziert und lassen keine Regelmäßigkeit erkennen.

Mit dem Identitätssatz für Potenzreihen steht uns aber die Methode des Koeffizientenvergleichs zur Verfügung. Sehr einfach ist die folgende

1. Anwendung: Ist $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gerade, also $P(z) = P(-z)$, so folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = P(z) = P(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \cdot z^n.$$

Nach dem Identitätssatz: $a_n = (-1)^n a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, insbesondere $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Ebenso sieht man: Ist $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ungerade, so ist $b_n = 0$ für alle geraden Indices n.

Konkret: Da $z \mapsto \frac{z}{2} \coth(\frac{z}{2}) = f(z) + \frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n + \frac{z}{2}$ eine gerade Funktion ist, gilt

$$\boxed{B_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad B_{2n+1} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.}$$

2. Anwendung: Ihre ganze Nützlichkeit entfaltet die Methode des Koeffizientenvergleichs im Zusammenspiel mit dem Cauchy-Produkt von Reihen. In Ana I haben wir gelernt:

Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen und $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$, so ist auch die Reihe über die c_n absolut konvergent, und es gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n .$$

Version für Potenzreihen: Sind $P_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ und $P_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradius R_1 bzw. R_2, so gilt für alle $z\in\mathbb{C}$ mit $|z-z_0|<\min\{R_1,R_2\}$, dass

$$P_1(z)P_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

wobei wieder $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$. Das ergibt in der konkret vorliegenden Situation: Für alle $z\in B_{2\pi}(0)$

$$(e^z-1)\cdot f(z)=z \;\Rightarrow\; \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n\right)=z$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\cdot\frac{B_{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)!}\,\frac{B_k}{k!} = \delta_{1,n}$$

Für $n=1$: $B_0=1$ und,

für $n\geq 2$: $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k=0$ bzw. für $n\geq 1$: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k=0$.

Die letzte Gleichung kann man noch nach B_n auflösen und erhält die Rekursionsformel

$$\boxed{B_0=1, \quad B_n=\frac{-1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k}$$

Diese zeigt, dass alle Bernoulli-Zahlen B_n rational sind, und man erhält als Anfang der Folge

B_0	B_1	B_2	B_4	B_6	B_8	B_{10}	B_{12}	B_{14}
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$

und danach wachsen die Beträge der B_n schnell an. Da der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ gerade $R = 2\pi$ ist, ergibt die Formel von Cauchy-Hadamard

$$\frac{1}{2\pi} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|B_n|}{n!}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{|B_{2n}|}{(2n)!}}\,.^{1)}$$

Da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$ für alle $p \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$, bedeutet das, dass zumindest eine Teilfolge von $(|B_{2n}|)_n$ schneller als jede Potenz nach ∞ strebt.

Mit demselben Argument – Cauchy-Produkt und anschließender Koeffizientenvergleich – wie wir es zur Herleitung der Rekursionsformel genutzt haben, kann man das Problem (einer geschlossenen Darstellung) der <u>Potenzsummen</u> in den Griff bekommen. Man setzt für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}_0$

$$S_n(p) := \sum_{k=0}^{n} k^p,$$

z.B. $S_n(0) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$, $S_n(1) = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$,

---

1) Tatsächlich handelt es sich bei dem 2. $\limsup_{n\to\infty}$ um einen Limes, was aber nicht offensichtlich ist.

$$S_n(2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{n}{6}$$

usw., im ersten Semester eine beliebte Aufgabe zur vollständigen Induktion. Gesucht ist eine allgemeine Darstellung

$$S_n(p) = a \cdot n^{p+1} + b n^p + \ldots$$

mit Koeffizienten $a, b, \ldots$, die von p und einem Summationsindex $k \leq p$ abhängen, nicht aber von n. Dazu brauchen wir für $z \in B_{2\pi}(0) \setminus \{0\}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kz} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(kz)^p}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{p!} \sum_{k=0}^{n-1} k^p$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{S_{n-1}(p)}{p!} \cdot z^p$$

Andererseits ~~ergibt~~ gilt aufgrund der geometrischen Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kz} = \frac{e^{nz}-1}{e^z-1} = \frac{z}{e^z-1} \cdot \frac{e^{nz}-1}{z}$$

$$= \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p}{p!} z^p\right)\left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{n^p}{p!} \cdot z^{p-1}\right)$$

$$= \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p}{p!} z^p\right)\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{n^{p+1}}{(p+1)!} z^p\right) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p z^p$$

mit ...

$$c_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{B_k}{k!} \frac{n^{p+1-k}}{(p+1-k)!} = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B_k \frac{n^{p+1-k}}{p+1-k} .$$

Jetzt ergibt der Koeffizientenvergleich

$$S_{n-1}(p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B_k \frac{n^{p+1-k}}{p+1-k} = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2} \frac{p\, n^p}{p} + \ldots$$

$$\ldots \frac{p(p-1)}{2} \cdot \frac{1}{6} \frac{n^{p-1}}{p-1} + \sum_{k=4}^{p} \binom{p}{k} B_k \frac{n^{p+1-k}}{p+1-k} .$$

Jetzt addiert man auf beiden Seiten noch n^p:

$$\boxed{S_n(p) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{p}{12} n^{p-1} + \sum_{k=4}^{p} \binom{p}{k} B_k \frac{n^{p+1-k}}{p+1-k}}$$

Kommen wir nun zu den angekündigten Potenzreihendarstellungen:

Satz 5: Mit den Bernoulli-Zahlen B_n gelten

(1) für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \pi$

$$z \coth(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} 4^n z^{2n} \quad \text{und}$$

$$z \cot(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} (-1)^n \cdot 4^n z^{2n} ;$$

(2) für $|z| < \frac{\pi}{2}$

$$\tanh(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} 4^n (4^n - 1) z^{2n-1} \quad \text{und}$$

$$\tan(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{(2n)!} 4^n (4^n - 1) z^{2n-1} ;$$

(3) für $|z|<\pi$

$$\frac{z}{\sinh(z)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!}(4^n-2)\,z^{2n} \qquad \text{und}$$

$$\frac{z}{\sin(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}(4^n-2)\,z^{2n}.$$

Bem.: Den Zsh. zu den Hyperbelfunktionen haben wir gleich zu Beginn hergestellt. Es ist $\quad B_1=-\frac{1}{2}$

$$\frac{z}{2}\coth\left(\frac{z}{2}\right) = f(z)+\frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}z^n + \frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!}\cdot z^{2n},$$

was für $|z|<2\pi$ konvergiert. Ersetzen wir hierin $\frac{z}{2}$ durch z, verkleinert sich der Konvergenzkreis auf $|z|<\pi$ und wir erhalten

$$z\coth(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!}\,4^n z^{2n} \qquad (|z|<\pi).$$

Für die "Übersetzung" zwischen Hyperbel- und trigonometrischen Funktionen benötigt man

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}) = \cosh(iz), \quad \cos(iz)=\cosh(-z)=\cosh(z),$$

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}) = \frac{1}{i}\sinh(iz), \quad \sin(iz) = \frac{1}{i}\sinh(-z) = i\sinh(z),$$

$$\tan(z) = \frac{1}{i}\tanh(iz), \quad \tan(iz) = i\tanh(z),$$

$$\cot(z) = i\coth(iz) \ (*), \quad \cot(iz) = \frac{1}{i}\coth(z).$$

Multiplikation von (*) mit z ergibt

$$z \cdot \cot(z) = iz \coth(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} 4^n (iz)^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} 4^n z^{2n}, \quad \text{ebenfalls für } |z| < \pi.$$

Zum Bew. des "trigonometrischen Teils" von (2) schreiben wir

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{\cos^2(\frac{z}{2}) - \sin^2(\frac{z}{2})}{2\sin(\frac{z}{2})\cos(\frac{z}{2})} = \frac{1}{2}\left(\cot(\tfrac{z}{2}) - \tan(\tfrac{z}{2})\right)$$

Wir ersetzen wieder $\frac{z}{2}$ durch z und isolieren den tan:

$$\tan(z) = \cot(z) - 2\cot(2z)$$

$$= \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} 4^n \left(z^{2n} - (2z)^{2n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{(2n)!} 4^n (4^n - 1) \cdot z^{2n-1},$$

was dann für $|z| < \frac{\pi}{2}$ gilt. Weiter haben wir

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{2\sin^2(z)}{2\sin(z)\cos(z)}$$

$$= \frac{2}{\sin(2z)} - \frac{2\cos^2(z)}{2\sin(z)\cos(z)} = \frac{2}{\sin(2z)} - \cot(z)$$

$$\Rightarrow \frac{2z}{\sin(2z)} = z\tan(z) + z\cot(z)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{(2n)!} 4^n (4^n - 2) z^{2n},$$

gültig für $|z| < \frac{\pi}{2}$. Ersetzt man $2z$ durch z, so fällt der Faktor 4^n in der Reihenentwicklung weg und die Darstellung (wie in (3) angegeben) konvergiert für alle $|z| < \pi$.

Die "Rückübersetzung" vom trigonometrischen ins "Hyperbolische" bleibt jetzt Ihnen überlassen. $\square$