7. Die Cauchysche Integralformel für den Kreisrand

Wir beginnen mit einem "technischen" Lemma, das uns zukünftig die "Differentiation unter dem Integralzeichen" erlauben wird!

Lemma 1: Es seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ offen,

$$f : \Omega \times \Omega' \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\xi, z) \longmapsto f(\xi, z)$$

stetig und $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ ein stückweiser C^1-Weg.

Für jedes $\xi \in \Omega$ sei die Funktion

$$z \longmapsto f(\xi, z)$$

in Ω' holomorph mit Ableitung $\frac{\partial f}{\partial z}(\xi, z)$. Die Abbildung

$$\frac{\partial f}{\partial z} : \Omega \times \Omega' \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\xi, z) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, z)$$

sei ebenfalls stetig. Dann ist die Funktion

$$G : \Omega' \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto G(z) := \int_\gamma f(\xi, z)\, d\xi$$

holomorph und es gilt $G'(z) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, z)\, d\xi$.

Bew.: Es sei $z \in \Omega'$ fixiert und $\delta > 0$ so klein, dass $\overline{B_\delta(z)} \subset \Omega'$. Dann ist für $h \in \mathbb{C}$ mit $0 < |h| < \delta$.

$$\left| \frac{1}{h}(G(z+h) - G(z)) - \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, z)\, d\xi \right|$$

$$= \left| \int_\gamma \frac{1}{h}(f(\xi, z+h) - f(\xi, z)) - \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, z)\, d\xi \right| \ldots$$

$$\leq L(\gamma) \cdot \sup_{\xi \in \gamma([a,b])} \left| \frac{1}{h}(f(\xi, z+h) - f(\xi, z)) - \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, z) \right|$$

aufgrund der Standardabschätzung. Nun ist

$$f(\xi, z+h) - f(\xi, z) = \int_{[z, z+h]} \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, w)\, dw$$

und mit $w = \eta(t) = z + th$, $t \in [0,1]$, so dass $\eta'(t) = h$

$$\ldots = h \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, z+th)\, dt.$$

Division durch h und Subtraktion von $\frac{\partial f}{\partial z}(\xi, z) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, z)\, dt$ ergibt

$$\frac{1}{h}(f(\xi, z+h) - f(\xi, z)) - \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, z) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, z+th) - \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, z)\, dt.$$

Nun sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $\frac{\partial f}{\partial z}$ auf dem Kompakten $\gamma([a,b]) \times \overline{B_S(z)}$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $\xi \in \gamma([a,b])$ und alle $w \in B_\delta(z)$ $(\delta \leq S\,!)$ gilt

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, w) - \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, z) \right| < \varepsilon.$$

Damit ist für alle $|h| < \delta$

$$\sup_{\substack{\xi \in \gamma([a,b]) \\ t \in [0,1]}} \left| \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, z+th) - \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, z) \right| \leq \varepsilon$$

und also

$$\lim_{h \to 0} \sup_{\xi \in \gamma([a,b])} \left| \frac{1}{h}(f(\xi, z+h) - f(\xi, z)) - \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, z) \right| = 0.$$

$\square$

Bez.: Es seien $\xi_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $\gamma_\pm : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma_\pm(t) := \xi_0 + re^{\pm it}$. Dann setzen wir

$$\int_{\partial B_r(\xi_0)^\pm} f(z)\,dz = \int_{\gamma^\pm} f(z)\,dz.$$

Die Vorzeichen geben an, mit welcher Orientierung der Kreisrand durchlaufen wird.

Satz 1 (Cauchy-Integralformel für den Kreisrand): Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $\xi_0 \in \Omega$ und $r > 0$, so dass $\overline{B_r(\xi_0)} \subset \Omega$. Dann ist f in jedem $z \in B_r(\xi_0)$ beliebig oft komplex differenzierbar, und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(\xi_0)^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,d\xi.$$

Bew.: Zuerst zeigen wir die behauptete Identität für $n = 0$. Aus dem letzten Abschnitt ist bereits bekannt, dass

$$\int_{\partial B_r(\xi_0)^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = f(z) \cdot \int_{\partial B_r(\xi_0)^+} \frac{d\xi}{\xi - z},$$

so dass für $n = 0$ nur die Gleichung

$$\int_{\partial B_r(\xi_0)^+} \frac{d\xi}{\xi - z} = 2\pi i$$

für ein beliebiges $z \in B_r(\xi_0)$ zu zeigen bleibt. Für $z = \xi_0$ haben wir dies bereits nachgerechnet. Die Hilfsfunktion

$$H(z) := \int_{\partial B_r(\xi_0)^+} \frac{d\xi}{\xi - z} \qquad (z \in B_r(\xi_0))$$

können wir nach Lemma 1 „unter dem Integral" differenzieren und erhalten

$$H'(z) = \int_{\partial B_r(\xi_0)^+} \frac{d\xi}{(\xi - z)^2} = 0 ,$$

letzteres, da $\xi \mapsto (z-\xi)^{-1}$ eine Stammfunktion des Integranden ist. Also ist H auf $B_r(\xi_0)$ konstant, genauer: $H(z) = 2\pi i \;\; \forall z \in B_r(\xi_0)$, so dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(\xi_0)^+} f(\xi) \frac{d\xi}{\xi - z} \qquad (z \in B_r(\xi_0)).$$

Dies können wir nach Lemma 1 differenzieren:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(\xi_0)^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \, d\xi$$

und induktiv

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(\xi_0)^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi . \qquad \square$$

Bsp. u. Bem.: (1) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $r > 0$ ist

$$\int_{\partial B_r(0)^+} \frac{\exp(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi = \frac{2\pi i}{n!} \exp^{(n)}(0) = \frac{2\pi i}{n!}.$$

(2) Da es zu jedem $z \in \Omega$ eine Kreisscheibe $\overline{B_r(z)} \subset \Omega$ gibt, auf der wir den Satz anwenden können, ist jede holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ in ganz Ω beliebig oft komplex differenzierbar. (Wenn wir an früherer Stelle z.B. "zweimal stetig komplex diff'bar" o.ä. vorausgesetzt haben, so erweist sich dies im Nachhinein als überflüssig.)

(3) Für $n = 0$ und $z = \xi_0$ erhalten wir die folgende Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen:

$$f(\xi_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(\xi_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - \xi_0}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(\xi_0 + re^{it}) \frac{ire^{it}}{re^{it}}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi_0 + re^{it})\, dt.$$

Dies gilt für jedes $r > 0$, für das $\overline{B_r(\xi_0)} \subset \Omega$. Aufgrund der Def. und der Linearität des Integrals gelten: Mit f und g haben auch

- $\lambda f + \mu g$ und
- $\overline{f}$, $\mathrm{Re}\, f$ und $\mathrm{Im}\, f$

die Mittelwerteigenschaft, diese ist also nicht auf die Klasse der holomorphen Funktionen beschränkt.

Besitzt eine Funktion f auf einer offenen Menge eine Stammfunktion F, so ist F per Definition holomorph und nach der Integralformel zweimal komplex differenzierbar. Damit ist auch f holomorph. Diese einfache Überlegung liefert uns die folgenden Kriterien für Holomorphie bzw. für holomorphe Fortsetzbarkeit:

Satz 2 (Morera): Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Gilt für jeden Dreiecksweg $\gamma = [z_0, z_1, z_2, z_0]$ mit $\operatorname{conv}(\{z_0, z_1, z_2\}) \subset \Omega$, dass

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

so ist f holomorph.

Bew.: Da jedes $z \in \Omega$ eine konvexe Umgebung besitzt, können wir Ω als konvex annehmen. Dann besitzt f nach Lemma 1 aus Abschnitt 6 auf Ω eine Stammfunktion. Mit der Vorbemerkung folgt, dass f holomorph ist. $\square$

Folgerung: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph in $\Omega \setminus \{z_0\}$. Dann ist f in Ω holomorph.

Bew.: Aus der punktierten Version des Satzes von Goursat folgt, dass für jeden Dreiecksweg γ (wie im Satz von Morera) gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Damit folgt die Beh. aus Satz 2. $\square$

Bem.: In der Folgerung kann man auch endlich viele Punkte oder sogar eine diskrete Menge von Punkten zulassen, in denen f lediglich stetig ist. Dabei heißt $M \subset \mathbb{C}$ diskret, wenn es zu jedem $z_0 \in M$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $M \cap B_\varepsilon(z_0) = \{z_0\}$. Dann wendet man den bewiesenen Ein-Punkt-Fall an mit $B_\varepsilon(z_0) \cap \Omega$ anstelle von Ω.

Satz 3 (Riemannscher Hebbarkeitssatz): Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$ und $f: \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Für ein $\varepsilon > 0$ sei $B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$ und $f|_{B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}}$ beschränkt. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $\tilde{f}: \Omega \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}|_{\Omega \setminus \{z_0\}} = f$.

Bem.: $\tilde{f}$ heißt die holomorphe Fortsetzung von f; durch diese Fortsetzung wird die Lücke im Definitionsbereich von f behoben.

Bsp.: Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

wird durch die Festlegung $\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & : z \neq 0 \\ 1 & : z = 0 \end{cases}$ zu

einer ganzen Funktion

$$\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

fortgesetzt.

Bew. des Hebbarkeitssatzes: Wir setzen

$$F(z) := \begin{cases} (z-z_0) f(z) & : z \neq z_0 \\ 0 & : z = z_0 \end{cases}.$$

Dann ist F holomorph in $\Omega \setminus \{z_0\}$ und in z_0 stetig, da f in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist. Aufgrund der Folgerung aus dem Satz v. Morera ist F in Ω holomorph, insbes. in z_0 komplex differenzierbar. Also gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Funktion $\varphi : B_\varepsilon(0) \to \mathbb{C}$ mit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$, so

dass
$$\begin{aligned} F(z) &= F(z_0) + F'(z_0)(z-z_0) + \varphi(z-z_0) \\ &= (z-z_0) \cdot \left(F'(z_0) + \frac{\varphi(z-z_0)}{z-z_0}\right) \qquad (z_0 \neq z \in B_\varepsilon(z_0)) \end{aligned}$$

Damit ist auf $B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ (vgl. Def. von F!)

$$f(z) = F'(z_0) + \frac{\varphi(z-z_0)}{z-z_0},$$

und wir können f stetig zu $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & z \neq z_0 \\ F'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

fortsetzen. Die Folgerung aus dem Satz von Morera ergibt die Holomorphie von $\tilde{f}$ in Ω. $\square$