Lösung und Wertung

Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2016/17
16.02.2017

Klausur zu Analysis II

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel sind (außer Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen und eine Liste unbestimmter Integrale gleichen Umfangs zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind zwei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Partielle Ableitungen)	12 Punkte
A3 (Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen)	10 Punkte
A4 (Extremwertaufgabe)	11 Punkte
A5 (Kettenregel)	7 Punkte
A6 (Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung)	11 Punkte
A7 (Inhomogene lineare Dgl. 1. Ordnung)	7 Punkte

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 32 (von 68 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 25 Punkten. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Sind $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen, so ist auch $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ offen.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(b) Ist durch $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_n(x)$ eine Folge integrierbarer Funktionen gegeben, die in jedem $x \in [a,b]$ gegen Null konvergiert, so gilt $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = 0$.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(c) Die Jacobi-Matrix einer stetig differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist symmetrisch.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(d) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so ist $f(K) \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen.
Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(e) Ist $y \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ eine Lösung der Differenzialgleichung

$$y'' + py' + qy = 0$$

mit $p, q \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, und gilt für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, dass $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, so ist $y(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

2. **(4+3+2+3 P.)** Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto F(x)$, mit

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_2^2 + 2x_1x_3, x_3^2 + 2x_1x_2, x_1^2 + 2x_2x_3).$$

(a) Bestimmen Sie eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass $F(x) = \nabla\varphi(x)$. (φ ist bis auf eine absolute, additive Konstante eindeutig bestimmt.)

(b) Für die Funktion φ aus Teil (a) berechne man die Richtungsableitung $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x_0)$ nach $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ in $x_0 = (2, 1, 0)$.

(c) Geben Sie die Definition der Rotation eines differenzierbaren Vektorfeldes $G : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \to \mathbb{R}^3$ an, und berechnen Sie $\operatorname{rot} F(x)$ für das oben angegebene Feld F.

(d) Berechnen Sie $\Delta\varphi(x)$ (für φ aus Teil (a)), und überprüfen Sie, ob φ harmonisch ist.

(a) $\varphi(x) = \int x_2^2 + 2x_1x_3 \, dx_1 = x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + c_1(x_2, x_3)$ 1P.

$= \int x_3^2 + 2x_1x_2 \, dx_2 = x_2x_3^2 + x_1x_2^2 + c_2(x_1, x_3)$ 1P.

$= \int x_1^2 + 2x_2x_3 \, dx_3 = x_1^2x_3 + x_2x_3^2 + c_3(x_1, x_2)$ 1P.

Vergleich zeigt: $\varphi(x) = x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_1^2x_3 + c$ 1P.

(b) Mit $\nabla\varphi(x_0) = F(x_0) = F(2,1,0) = (1,4,4)$ 1P

ergibt sich $\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x_0) = \langle\nabla\varphi(x_0), \xi\rangle}_{1P.} = \frac{1}{\sqrt{3}}\langle(1,4,4),(1,1,1)\rangle = \frac{9}{\sqrt{3}}$ 1P.

(c) $\operatorname{rot} G = \left(\frac{\partial G_3}{\partial x_2} - \frac{\partial G_2}{\partial x_3}, \frac{\partial G_1}{\partial x_3} - \frac{\partial G_3}{\partial x_1}, \frac{\partial G_2}{\partial x_1} - \frac{\partial G_1}{\partial x_2}\right)$ 1P.

vgl. Übungen, A 30

1P

$\operatorname{rot} F = \operatorname{rot} \nabla\varphi = (0,0,0)$

(d) $\Delta\varphi(x) \underset{1P.}{=} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)$

vgl. Übungen, A 29

$= \frac{\partial}{\partial x_1}(x_2^2 + 2x_1x_3) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_3^2 + 2x_1x_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(x_1^2 + 2x_2x_3)$

$= 2(x_1 + x_2 + x_3)$ 1P.

$\Rightarrow \varphi$ ist nicht harmonisch, da $\Delta\varphi \neq 0$. 1P.

3. (3+1+6 P.) Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k(x) = \dfrac{1+|x|^k}{2+|x|^{2k}}$, dabei $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ die euklidische Norm von x.

(a) Berechnen Sie die Grenzfunktion $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ (punktweiser Limes).

(b) Bestimmen Sie die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f. (Ohne Beweis).

(c) Weiter sei $e \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor der Länge $|e| = 1$ und, für $j \in \{1,2,3\}$, B_j die offene Kugel vom Radius 1 um je. Untersuchen Sie, ob die Funktionenfolge $(f_k)_k$ auf B_j gleichmäßig gegen f konvergiert. (Formulieren Sie jeweils eine Behauptung und begründen Sie diese!)

Lös. 1 (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } |x|<1 \quad 1P. \\ \frac{2}{3} & \text{für } |x|=1 \quad 1P. \\ 0 & \text{für } |x|>1 \quad 1P. \end{cases}$

(b) $\{x\in\mathbb{R}^n : f \text{ ist unstetig in } x\} = \partial B_1(0) = \{x\in\mathbb{R}^n : |x|=1\}$ 1P.

(c) (i) Auf $B_1 = B_1(e)$ ist die Konvergenz nicht glm., 1P

da die Grenzfunktion dort unstetig, alle f_k hingegen stetig sind. 1P.

(alt.: direkte Abschätzung wie in (ii), s.u.)

(ii) Auf $B_2 = B_1(2e)$ ist die Konvergenz nicht glm., 1P.

denn: $\sup\limits_{x\in B_2} |f_k(x) - \underbrace{f(x)}_{=0}| \geq \sup\limits_{\varepsilon>0} f_k((1+\varepsilon)e) = \sup\limits_{\varepsilon>0} \dfrac{1+(1+\varepsilon)^k}{2+(1+\varepsilon)^{2k}}$

$= \dfrac{2}{3}$ und also $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in B_2} |f_k(x) - f(x)| \neq 0$ 1P.

(iii) Auf $B_3 = B_1(3e)$ ist die Konvergenz gleichmäßig, 1P.

denn $\sup\limits_{x\in B_3} |f_k(x) - \underbrace{f(x)}_{=0}| = \sup\limits_{x\in B_3} \dfrac{1+|x|^k}{2+|x|^{2k}}$

$= \sup\limits_{x\in B_3} \dfrac{1}{|x|^k}\dfrac{1+|x|^{-k}}{1+2|x|^{-2k}} \leq \sup\limits_{x\in B_3} \dfrac{2}{\underbrace{|x|^k}_{|x|\geq 2}} \leq 2^{1-k} \to 0 \quad (k\to\infty)$ 1P.

4. **(4+4+3 P.)** Es sei $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f genau eine kritische Stelle (x_c, y_c) besitzt, und bestimmen Sie diese.

(b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f an der Stelle (x_c, y_c).

(c) Untersuchen Sie $\operatorname{Hess} f(x_c, y_c)$ auf Definitheit und stellen Sie fest, ob in (x_c, y_c) eine Maximal- bzw. Minimalstelle oder ein Sattelpunkt vorliegt.

Lös.:

(a) Für die partiellen Ableitungen haben wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x - (x^2+y^2))e^{-(x+y)} \qquad 1P.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2y - (x^2+y^2))e^{-(x+y)} \qquad 1P.$$

Eine kritische Stelle liegt vor, wenn $\nabla f(x,y) = (0,0)$, 1P

dies ist hier genau dann der Fall, wenn

$$\left.\begin{array}{l} 2x = x^2 + y^2 = 2y \iff x = y = x^2 \iff x = y = 1 \\ \text{(man beachte den Def.-Bereich!). Also } (x_c, y_c) = (1,1). \end{array}\right\} 1P.$$

(b) Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung sind

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (2 - 4x + (x^2+y^2))e^{-(x+y)} \qquad 1P.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (-2x - 2y + x^2 + y^2)e^{-(x+y)} \qquad 1P.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (2 - 4y + (x^2+y^2))e^{-(x+y)} \qquad 1P.$$

Forts. Lös. zu A 4:

noch zu Teil (b): Für $(x,y) = (x_c, y_c) = (1,1)$ ergibt sich

$$\operatorname{Hess} f(1,1) = e^{-2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$ 1P.

(c) Es ist $\det \operatorname{Hess} f(1,1) = -4e^{-4} < 0$ 1P.

und daher $\operatorname{Hess} f(1,1)$ indefinit. 1P.

In $(1,1)$ liegt also ein Sattelpunkt vor. 1P.

5. **(7 P.)** Es sei $y : (0, \sqrt[3]{4}) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

   (a) Für alle $x \in (0, \sqrt[3]{4})$ gilt $x^3 + y(x)^3 = 3xy(x)$,

   (b) es gibt genau eine globale Maximalstelle $x_0 \in (0, \sqrt[3]{4})$ von y.

   Bestimmen Sie x_0 und berechnen Sie $y(x_0)$.

Lös.: Mit $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ist (a) $\Longleftrightarrow F(x, y(x)) = 0$. 1P.

Ableiten mit Hilfe der Kettenregel ergibt

$$0 = \frac{d}{dx} F(x, y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \cdot y'(x) \qquad 1P.$$

$$= 3x^2 - 3y + (3y^2 - 3x)y' \qquad 1P.$$

$$\Longrightarrow \quad y - x^2 = (y^2 - x)y' \qquad 1P.$$

Ist y in x_0 maximal, folgt

$$0 = y'(x_0) \quad \text{und also} \quad y(x_0) = x_0^2 . \qquad 1P.$$

Einsetzen in (a) ergibt

$$x_0^3 + x_0^6 = 3x_0^3 \underset{x_0 \neq 0}{\Longrightarrow} x_0^3 = 2 \Longrightarrow x_0 = \sqrt[3]{2} . \qquad 1P.$$

Für den Funktionswert in x_0 ergibt sich

$$y(x_0) = x_0^2 = \sqrt[3]{4} . \qquad 1P.$$

6. (5+6 P.) Es seien $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{und} \quad x + 3y \leq 10\}$ sowie

$$f : K \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2y^3.$$

(a) Begründen Sie, dass die Funktion f ihr (globales) Maximum annimmt, und zwar auf dem Teil des Randes ∂K, wo $x + 3y = 10$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\max\{f(x,y) : (x,y) \in K\}$.

Lös.: (a) f ist stetig und hat mit K einen kompakten Definitionsbereich, nimmt also ihr. Max. an. 1P

Es ist $\nabla f(x,y) = (2xy^3, 3x^2y^2)$, 2P

also $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ auf $\mathring{K}$, sodass es dort keine Maximalstelle gibt. 1P.

Da $f(x,y) = 0$, falls $x = 0$ oder $y = 0$, andererseits aber f positive Werte annimmt, muß die Maximalstelle auf der Geraden $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y = 10\}$ liegen. 1P.

(b) Ist $g(x,y) = x + 3y - 10$ so muß also nach dem Satz über die Lagrange-Multiplikatoren gelten: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$ 1P

Es ist also das GlS.

$$2xy^3 = \lambda \quad \text{und} \quad 3x^2y^2 = 3\lambda$$ 1P

zu lösen. Teilt man die 2. Gleichung durch 3, folgt

$$2xy^3 = \lambda = x^2y^2 \underset{(x \neq 0 \neq y)}{\Longrightarrow} 2y = x$$ 1P.

Einsetzen in die Nebenbed. ergibt $5y = 10$, 1P.

also $(x,y) = (4,2)$. 1P.

$\leadsto \max\{f(x,y) : (x,y) \in K\} = f(4,2) = 4^2 \cdot 2^3 = 128$ 1P.

6. (7 P.) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y(1) = 2$ für die inhomogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = \frac{7}{x} y(x) + 3x^3.$$

Lös.: Aus der Vorl. ist bekannt die Lösungsformel

$$y(x) = \varphi(x)\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{\varphi(t)}\,dt\right) \qquad 1P.$$

mit $\varphi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right)$, 1P.

hier mit $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $p(t) = \frac{7}{t}$, $q(t) = 3t^3$, so dass

$$\varphi(x) = \exp\left(\int_1^x \frac{7}{t}\,dt\right) = \exp\left(7(\ln(x) - \ln(1))\right) \qquad 1P.$$

$$= x^7, \qquad 1P.$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{\varphi(t)}\,dt = \int_1^x \frac{3t^3}{t^7}\,dt = 3\int_1^x t^{-4}\,dt = 1 - x^{-3} \qquad 2P.$$

und schließlich

$$y(x) = x^7(2 + 1 - x^{-3}) = 3x^7 - x^4 \qquad 1P.$$

Bem.: Es gibt verschiedene Alternativen. z.B. kann man erraten, dass $y_p(x) = \lambda x^4$ ein sinnvoller Ansatz zumindest für eine partikuläre Lösung ist.